Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO I - LIVIA CORSI (27-2-08)

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 1)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x - y \end{cases}$$

con condizioni iniziali generiche $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Se ne determini la soluzione.

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^4, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 1, 2, 0)$. Se ne trovi la soluzione.

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. Se ne trovi la soluzione al variare del parametro α.

ESERCIZIO 5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

con dato iniziale $x(0) = (1, 1, 1)$. Se ne trovi la soluzione. Verificare in particolare che il moto descritto dal sistema è planare e individuare il piano su cui si svolge.

ESERCIZIO 6. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dimostrare che $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

ESERCIZIO 7. Sia E uno spazio vettoriale e sia $T \in L(E)$. Sia S l'insieme delle soluzioni del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = T(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

al variare del dato iniziale.

(7.1) Verificare che se E ha dimensione finita, allora S è un sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ naturalmente isomorfo a E.

(7.2) Mostrare che la derivazione $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ è un'operatore lineare su S e che, nel caso in cui E abbia dimensione finita, gli autospazi della derivazione corrispondono agli autospazi di T.