

## Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

### FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO X - LIVIA CORSI (07-05-2008)

ESERCIZIO 1. Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{1}{3\rho^3}$$

- (1.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (1.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (1.3) Analizzare qualitativamente le orbite del piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (1.4) Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (1.5) Scrivere la variazione di  $\theta(t)$  in funzione di  $\rho(t)$  e dire sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log\left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho}\right)$$

- (2.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (2.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
- (2.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (2.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .

ESERCIZIO 3. Si considerino due punti materiali di massa  $m_1 = m_2 = 2$ , che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -2\rho^2 - \alpha \log \rho$$

dove  $\rho = |\mathbf{r}|$  e  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Rispondere alle domande seguenti al variare del parametro  $\alpha$  e del modulo  $L$  del momento angolare del sistema.

- (3.1) Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà nelle variabili polari  $(\rho, \theta)$ .
- (3.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (3.4) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .
- (3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano  $(\rho, \dot{\rho})$ .