

## Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

### FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XI - LIVIA CORSI (15-05-2008)

ESERCIZIO 1. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine si muove lungo la curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$  tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 + 1, \\ \dot{y} = 2xy, \end{cases}$$

L'asse  $\xi$  di  $K$  si mantiene tangente alla curva  $\vec{q}_{O'}(t)$ , mentre l'asse  $\zeta$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ ; all'istante iniziale  $O'$  occupa la posizione  $\vec{q}_{O'}(0) = (0, -1, 0)$  e gli assi  $\xi$  e  $\eta$  sono diretti come gli assi  $x$  e  $y$  rispettivamente. Un punto  $P$  di massa  $m = 1$  si muove in  $K$  lungo l'asse  $\xi$  sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(\xi) = \xi^2 - 1$$

con dato iniziale  $\xi(0) = 0$  ed energia meccanica  $E = 0$ .

(1.1) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione con una rotazione  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .

(1.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi  $K$  e  $\kappa$ .

(1.3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$  e la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

(1.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .

(1.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .

(1.6) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto  $P$ .

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo) che si muove di moto non puramente traslatorio, in modo tale che l'asse  $\zeta$  si mantenga sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ . Dimostrare che se un punto  $P$  si muove in  $K$  su un piano orizzontale, allora la forza centrifuga è proporzionale alla proiezione sul piano  $\{\zeta = 0\}$  del vettore che individua  $P$  in  $K$ . Dimostrare che nel caso in cui la rotazione del sistema  $K$  abbia velocità angolare costante, la forza di Coriolis è proporzionale, con fattore di proporzionalità costante, alla proiezione sul piano  $\{\zeta = 0\}$  del vettore che individua  $P$  in  $K$  se e solo se  $P$  si muove con velocità angolare costante lungo una circonferenza il cui centro giace sull'asse  $z$ .

ESERCIZIO 3. Dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine si muove sul cilindro  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  lungo l'elica di passo  $a = 2\pi$ . La componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua  $O'$  varia secondo la legge  $x_{O'}(t) = \cos t$ . L'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$  mentre l'asse  $\xi$  di  $K$  si mantiene tangente alla superficie del cilindro. All'istante iniziale il punto  $O'$  occupa la posizione  $q_{O'} = (1, 0, 0)$ . Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$  si muove nel sistema  $K$  lungo l'asse  $\eta$  secondo l'equazione

$$\begin{cases} \dot{\eta} = 2\eta \\ \eta(0) = 1 \end{cases}$$

(3.1) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione con una rotazione  $D = C \circ B$  e determinare la forma di  $C$  e  $B$ .

(3.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi  $\kappa$  e  $K$ .

(3.3) Determinare la velocità assoluta  $\mathbf{v}$  e la velocità relativa  $\mathbf{v}'$ .

- (3.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_0$ .
- (3.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $\mathbf{v}_T$ .
- (3.6) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto  $P$ .