

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO XII - LIVIA CORSI (23-05-2008)

ESERCIZIO 1. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muova nel piano (x, y) lungo il profilo $y(x) = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x vari secondo la legge $x_{O'}(t) = \sin t$. L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$

(1.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , *i.e.* $D = C \circ B$ e determinare C e B .

(1.2) Scrivere la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.

(1.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} e la velocità relativa \mathbf{v}' .

(1.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(1.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(1.6) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P .

(1.7) Dimostrare che la traiettoria $t \rightarrow \mathbf{q}(t)$ attraversa l'asse x infinite volte, e calcolare esplicitamente i tempi di attraversamento. [*Suggerimento.* Si ha $\sin x = \tan x / \sqrt{1 + \tan^2 x}$ per $|x| < \pi/2$.]

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale P di massa m , sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{5}\alpha x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x,$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si consideri preliminarmente il caso $\alpha = 0$.

(2.1) Studiare il grafico dell'energia potenziale al variare del parametro β .

(2.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato al variare di β .

(2.3) Se ne discuta la stabilità al variare di β .

(2.4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema al variare di β .

(2.4) Si consideri ora il caso $\alpha > 0$: si risponda alle stesse domande sopra, al variare dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}_+$ e $\beta \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \alpha \log(1 + \rho^2),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutere il moto della variabile $\rho(t)$, rispondendo alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare del sistema.

(3.1) Scrivere l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.

(3.2) Se determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(3.3) Disegnare il grafico del potenziale efficace.

(3.4) Analizzare qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(3.6) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.