Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato II - Livia Corsi (05-03-08)

Esercizio 1. Risolovere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} - 4\dot{x} + 29x = 1 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax + b(t), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 2)$. Se ne determini la soluzione.

Esercizio 3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione non nulla di

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} + 4x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon\dot{x} - x = \varepsilon e^{2t} \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Se ne determini la soluzione al variare di $\varepsilon \geq 0$.

Esercizio 5. Determinare le equazioni parametriche della curva piana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin 2t \\ \dot{y} = x + 3\cos 2t \end{cases}$$

e passante per il punto $(1, 0)$.

Esercizio 6. Sia S l'insieme delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t) \\ x(0) = x_{1,0} \\ \dot{x}(0) = x_{2,0} \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$

al variare dei dati iniziali, e sia S_0 l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo associato.
(6.1) Dimostrare che S_0 è uno spazio vettoriale e che S è uno spazio affine su S_0.
(6.2) Dedurre da questo la validità del metodo di variazione delle costanti.