Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato V - Livia Corsi (26-03-08)

Esercizio 1. Si consideri il sistema gradiente della forma

$$\dot{z} = -\nabla V(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

dove

$$V(x, y) = x^4 - 2x^2 + 2(y^2 + 1)(x^2 - 1) + y^4 - 2y^2$$

(1.1) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
(1.2) Analizzare qualitativamente le curve di livello.
(1.3) Stimare il bacino d'attrazione degli eventuali punti asintoticamente stabili.

Esercizio 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 + 3y^2 - 4) \\ \dot{y} = y(4 - 3x^2 - y^2) \end{cases}$$

(2.1) Determinare una costante del moto per il sistema.
(2.2) Trovare i punti d'equilibrio e discuterne la natura.
(2.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.
(2.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
(2.5) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, individuare il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine diventa asintoticamente stabile. Verificare inoltre che in tal caso la regione

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 4\}$$

è contenuta nel bacino d'attrazione dell'origine.

Esercizio 3. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{\theta} = (2y - \sin\theta)e^y \\ \dot{y} = ye^y \cos\theta \end{cases} \qquad (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}.$$

(3.1) Mostrare che la funzione

$$H(\theta, y) = y^2 - y\sin\theta$$

è una costante del moto per il sistema.
(3.2) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
(3.3) Studiare qualitativamente le curve di livello

$$\Gamma_E = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \ : \ H(\theta, y) = E\}$$

nel piano delle fasi e analizzare i versi di percorrenza delle corrispondenti traiettorie.
(3.4) Individuare i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
(3.5) Studiare l'andamento asintotico della soluzione che abbia come dato iniziale $(\overline{\theta}, \overline{y}) = (\theta_0, 0)$ al variare di $\theta_0 \in \mathbb{T}$.