Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Tutorato VI - Livia Corsi (02-04-08)

Esercizio 1. Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico con attrito $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$, dove $\alpha > 0$ e $k > 0$ sono due costanti.
(1.1) Dimostrare che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(1.2) Enunciare il teorema di Barbašin-Krasovskij e applicarlo per stimare il bacino d'attrazione dell'origine.

Esercizio 2. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 + \alpha x^2), \\ \dot{y} = -y(1 + 3\alpha x^2), \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2.1) Si trovi una costante del moto per il sistema.
(2.2) Si determinino i punti d'equilibrio del sistema al variare di α.
(2.3) Se ne discuta la stabilità al variare di α.
(2.4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema al variare di α. In particolare si mostri che non esistono traiettorie periodiche per alcun valore di α.

Esercizio 3. Sia $\dot{x} = -\nabla V(x)$ un sistema gradiente, con $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2.
(3.1) Dimostrare che se x_0 è un punto di minimo isolato per V allora x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(3.2) Se $n = 2$ e $V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2$ dimostrare che l'origine è l'unico punto d'equilibrio, che è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile e che il suo bacino d'attrazione è tutto il piano.

Esercizio 4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si calcoli $\exp(At)$ per $t \in \mathbb{R}$, e si usi il risultato per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = |x|, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.
(5.1) Quante soluzioni esistono?
(5.2) Si trovi esplicitamente una soluzione, e se ne discuta la regolarità in t.
(5.3) Si verifichi che $x_0 = 0$ è un punto d'equilibrio, e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 6. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 5y^4 - 6y^2(x^2 + 1) + (x^2 - 1)^2, \\ \dot{y} = 4xy(1 + y^2 - x^2). \end{cases}$$

(6.1) Si dimostri che la funzione

$$H(x, y) = y(y - x - 1)(y + x + 1)(y - x + 1)(y + x - 1)$$

è una costante del moto per il sistema.

(6.2) Si determinino i punti d'equilibrio.
(6.3) Se ne discuta la stabilità.
(6.4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

ESERCIZIO 7. Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1), \end{cases}$$

si risponda alle seguenti domande.
(7.1) Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio stabile.
(7.2) Si dimostri che se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, l'origine diventa un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 8. Si consideri il sistema dinamico lineare $\dot{x} = Ax$. Si dimostri che se tutti gli autovalori di A hanno parte reale (strettamente) negativa allora $x = 0$ è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.