

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

TUTORATO IX - LIVIA CORSI (30-04-2008)

ESERCIZIO 1. Si considerino due punti materiali di massa $m_1 = m_2 = 2$, che interagiscono mediante una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\alpha}{\rho} - \log \rho$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è il vettore che individua la posizione relativa dei due punti e $\alpha \in \mathbb{R}$. Rispondere alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo $L \neq 0$ del momento angolare del sistema.

- (1.1) Descrivere il moto mettendosi nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema a due gradi di libertà nelle variabili polari (ρ, θ) .
- (1.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (1.3) Analizzare qualitativamente le orbite del piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (1.4) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (1.5) Scrivere la variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$ e dire sotto quali condizioni il moto complessivo del sistema è periodico.

ESERCIZIO 2. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{4}\rho^4 + 2\rho,$$

- (2.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (2.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (2.3) Studiare qualitativamente il grafico del potenziale efficace.
- (2.4) Analizzare qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (2.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

ESERCIZIO 3. Si consideri un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\rho^2 + 4 \log \rho$$

- (3.1) Scrivere le equazioni di Newton e il sistema dinamico associato.
- (3.2) Determinare eventuali punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
- (3.3) Studiare il grafico del potenziale efficace.
- (3.4) Studiare qualitativamente le curve di livello nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3.5) Determinare le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.