Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (25-01-2010)

Esercizio 1. [6] Sia A una matrice reale tale che $A^n = 0$ per qualche $n \geq 2$. Si consideri il sistema dinamico lineare $\dot{x} = Ax$, e si indichi con $\varphi(t, \bar{x})$ la soluzione con dato iniziale $\bar{x}$.
(1.1) [3] Si dimostri che $L(\bar{x}) := \lim_{t\to\infty} t^{1-n} |\varphi(t, \bar{x})|$ è finito per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
(1.2) [3] Esistono dati iniziali $\bar{x} \neq 0$ tali che si abbia $L(\bar{x}) = 0$?

Esercizio 2. [14] Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 2x^6 - 15x^4 + 24x^2, & x \geq 0, \\ Ax^2, & x < 0, \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R} \ .$$

(2.1) [1] Fissare A in modo che $V(x)$ sia di classe C^2.
(2.2) [1] Scrivere le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
(2.3) [3] Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(2.4) [2] Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
(2.5) [2] Discutere qualitativamente il moto nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$.
(2.6) [1] Dimostrare che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \sqrt{22})$ è asintotica.
(2.7) [1] Dimostrare che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/2, 0)$ è periodica.
(2.8) [3] Scrivere il periodo dell'orbita periodica al punto precedente come integrale definito.

Esercizio 3. [6] Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathbb{R})$, e si assuma che $W(x)$ sia una costante del moto di classe C^1 per il sistema.
(6.1) [2] Sia x_0 un punto di minimo isolato per W: dimostrare che x_0 è un punto d'equilibrio stabile.
(6.2) [2] Dimostrare che x_0 non è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(6.3) [2] Enunciare il teorema di Dirichlet e utilizzare il risultato al punto (6.1) per dimostrarlo.

Esercizio 4. [4] Forza di Coriolis: se ne dia la definizione e se ne illustrino gli effetti attraverso esempi, in particolare in riferimento al moto sulla superficie terrestre.

Esercizio 5. [6] Si consideri il sistema meccanico conservativo bidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left(x^2 + \lambda^2 y^2 \right) ,$$

e si indichi con $\varphi_{\lambda,E}(t)$ la soluzione, in funzione del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ e dell'energia totale E.
(5.1) [4] Si dimostri che esiste $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \varphi_{\lambda,E}(t)$ e lo si calcoli esplicitamente.
(5.2) [2] Si dimostri che nel limite $\lambda \to \infty$ il sistema diventa vincolato e si determini il vincolo.

Esercizio 6. [16]
(4.1) [2] Dare la definizione di assi d'inerzia e momenti principali d'inerzia di un sistema rigido.
(4.2) [2] Determinare gli assi d'inerzia di una sfera omogenea.
(4.3) [2] Determinare gli assi d'inerzia di un cubo omogeneo.
(4.4) [1] Nell'ipotesi che sfera e cubo abbiano due momenti principali d'inerzia uguali, esiste qualche relazione tra i restanti momenti principali d'inerzia dei due solidi?
(4.5) [5] Calcolare i momenti principali d'inerzia di una sfera omogenea di raggio R e massa M.
(4.6) [4] Calcolare i momenti principali d'inerzia di un cubo omogeneo di lato L e massa M.