Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Seconda prova d'esonero (04-06-2009)

Esercizio 1. [8] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo una guida di equazione $y = x^2$ in modo tale che si abbia $x_{O'}(t) = t$. L'asse ξ si mantiene sempre tangente alla guida, mentre l'asse ζ è parallelo all'asse z. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema di riferimento K lungo l'asse η con legge oraria $\eta = \eta(t)$.
(5.1) [2] Determinare la trasformazione rigida $D: K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, e determinare C e B.
(5.2) [1] Determinare la velocità assoluta del punto P.
(5.3) [1] Determinarne la velocità relativa.
(5.4) [1] Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento.
(5.5) [1] Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento.
(5.6) [2] Determinare il moto $\eta(t)$ tale che il punto P si trovi in ogni istante sull'asse y nel sistema κ. Quale posizione P occupa sull'asse y al tempo t?

Esercizio 2. [6] Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Dato un intorno B (sufficientemente piccolo) di x_0 sia $\tau(x)$ il tempo necessario perché la soluzione con dato iniziale $x \in B$ raggiunga la retta ortogonale a $f(x_0)$ in x_0. Si definisca $\Phi(x)$ tale che la trasformazione

$$x \to y = (\Phi(x), \tau(x))$$

sia un diffeomorfismo da B a un intorno dell'origine, e si dimostri l'asserto.

Esercizio 3. [16] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(\theta) = \sin^2\theta + \alpha\cos^4\theta, \qquad \theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α rispondere alle seguenti domande.
(3.1) [1] Scrivere l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
(3.2) [2] Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(3.3) [5] Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(\theta)$.
(3.4) [5] Discutere qualitativamente il moto del sistema.
(3.5) [1] Determinare per quali valori di α la traiettoria con condizioni iniziali $(\theta(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica, e per quali valori è asintotica.
(3.6) [2] Per i valori di α per i quali la traiettoria è periodica scriverne il periodo $T(\alpha)$ come integrale definito. Si dimostri in particolare per $\alpha = 1$ la traiettoria è periodica e $T(1) \leq 2\pi$.

Esercizio 4. [5] Si dia la definizione di velocità areolare e si dimostri la seconda legge di Keplero.

Esercizio 5. [6] Un punto materiale P di massa m si muove su una superficie sferica di raggio R, sottoposto alla forza di gravità.
(5.1) [2] Fare un esempio esplicito di traiettoria virtuale per il sistema.
(5.2) [1] Le soluzioni delle equazioni del moto sono traiettorie virtuali?
(5.3) [2] Come sono dirette le forze vincolari? Perché?
(5.4) [1] Indicare in quali punti della superficie sferica la forza vincolare è massima e in quali è minima.

Esercizio 6. [5] Si consideri il sistema rigido costituito da 4 punti di massa $m = 1$ disposti ai vertici di un quadrato di massa trascurabile e lato $\ell = 1$.
(6.1) [3] Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse $\mathbf{e}$ ortogonale al quadrato e passante per il centro di massa del sistema.
(6.2) [2] L'asse $\mathbf{e}$ è un asse d'inerzia?