Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (17-04-2009)

Esercizio 1. [8] Si consideri il sistema lineare planare

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \mu,$$

e si indichi con $x(t) = x(t, x_0, \mu)$ la soluzione in funzione del dato iniziale $x(0) = (a, b)$ e del parametro μ.
(1.1) [2] Si calcoli $x(t, x_0, 0)$ in funzione di x_0.
(1.2) [3] Si calcoli esplicitamente $x(t, x_0, \mu)$ in funzione di x_0 e μ per $\mu > 0$.
(1.3) [3] Esistono dati iniziali $\bar{x}_0 = (\bar{a}, \bar{b})$ tali che la funzione $x(t, \bar{x}_0, \mu)$ risulti continua in $\mu = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$?

Esercizio 2. [8] Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x, y) = \left(y^2 - 1\right)\left(1 - x^2\right).$$

(2.1) [1] Si determinino i punti d'equilibrio.
(2.2) [2] Se ne studi la stabilità.
(2.3) [5] Si studi qualitativamente il sistema.
[*Suggerimento.* Usare il fatto che le rette $y = \pm x$ sono invarianti per il sistema.]

Esercizio 3. [4] Sia x_0 un punto d'equilibrio stabile per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Si indichi con $L_\omega(x)$ l'insieme ω-limite del punto x.
(3.1) [2] Si dimostri che esiste un intorno B di x_0 tale che $L_\omega(x) \neq \emptyset \ \forall x \in B$.
(3.2) [2] Si assuma che esista una funzione $W \colon B \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che i) $W(x_0) = 0$, ii) $W(x) > 0$ $\forall x \in B \setminus \{x_0\}$, iii) $\dot{W}(x) < 0 \ \forall x \in B \setminus \{x_0\}$. Si determini allora $L_\omega(x)$ per $x \in B$.

Esercizio 4. [6] Motivando dettagliatamente la risposta,
(4.1) [3] si faccia un esempio in una dimensione e un esempio in due dimensioni di un punto d'equilibrio che sia attrattivo ma non stabile;
(4.2) [3] si faccia un esempio in due dimensioni di un punto d'equilibrio che sia stabile ma non attrattivo, e si discuta se si può fare un esempio in una dimensione.

Esercizio 5. [8] Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = Ax + B$ in $\mathbb{R}^n$, dove A è una matrice $n \times n$ tale che $\mathrm{Re}\lambda < -c < 0 \ \forall \lambda \in \Sigma(A)$ e $B = B(t)$ è una funzione continua da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$.
(5.1) [1] Per $n = 1$, si mostri che se $B = 0$ l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile. Con che velocità le traiettorie $x(t)$ decadono verso l'origine per $t \to +\infty$?
(5.2) [2] Per $n = 1$, si assuma $|B(t)| \le \mathrm{e}^{c_0 t} \ \forall t \ge 0$ per qualche costante c_0. Si diano delle condizioni su c_0 perché le traiettorie continuino a tendere all'origine per $t \to +\infty$, e si dia una stima delle velocità di decadimento.
(5.3) [1] Per $n = 1$, sotto quali condizioni su c_0 le traiettorie rimangono limitate per $t \to +\infty$?
(5.4) [4] Cosa succede per n qualsiasi?

Esercizio 6. [10] Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(x^2 + y^2\right), \\ \dot{y} = -4x\left(x^2 + y^2 - 2\right). \end{cases}$$

(6.1) [1] Dimostrare che esiste una costante del moto $H(x, y)$ per il sistema.
(6.2) [1] Determinare i punti d'equilibrio.
(6.3) [4] Discuterne la stabilità.
(6.4) [4] Studiare qualitativamente le traiettorie del sistema.