

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009
FM1 - Equazioni differenziali e meccanica
TUTORATO 11 - ROBERTO FEOLA E LUCA BATTAGLIA (20-05-09)

ESERCIZIO 1. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muove nel piano (x, y) lungo la parabola di equazioni $y = x^2$ in modo tale che la sua componente lungo l'asse x sia $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene parallelo all'asse z di κ , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla parabola. Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K lungo l'asse ξ secondo la legge oraria $\xi(t) = e^t$.

(1.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B .

(1.2) Determinare il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto κ e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K .

(1.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(1.4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(1.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(1.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(1.7) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P .

Suggerimento: si ricorda che $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ e $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ESERCIZIO 2. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo) che all'istante $t = 0$ coincide con κ e ruota attorno all'asse ζ , parallelo a z , con velocità angolare costante ω . L'origine O' si muove lungo l'asse z con legge oraria $z_{O'}(t) = t$. Un punto P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K secondo le equazioni

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\eta \\ \dot{\eta} = \xi \\ \dot{\zeta} = \alpha \end{cases}$$

dove α è un parametro reale, e al tempo $t = 0$ si trova nel punto $(\xi(0), \eta(0), \zeta(0)) = (1, 0, 0)$.

(2.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , $D = C \circ B$, e determinare la forma di C e B .

(2.2) Determinare il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto κ e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K .

(2.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} .

(2.4) Determinare la velocità relativa \mathbf{v}' .

(2.5) Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(2.6) Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(2.7) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P .

(2.8) Discutere sotto quali condizioni sui parametri ω e α il punto P ha un moto periodico nel sistema κ .

(2.9) Discutere sotto quali condizioni sui parametri ω e α il punto P risulta fermo nel sistema κ .

Suggerimento: si ricorda che $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ e $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

ESERCIZIO 3. Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto) si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine si muove lungo la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$ tale che le sue componenti verificano

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 + 1 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

L'asse ξ di K si mantiene tangente alla curva $\mathbf{q}_{O'}(t)$, mentre l'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z di κ ; all'istante iniziale O' occupa la posizione $\mathbf{q}_{O'}(0) = (0, -1, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e

y rispettivamente. Un punto P di massa $m = 1$ si muove in K lungo l'asse ξ sotto l'azione di una forza conservativa di energia potenziale

$$V(\xi) = \xi^2 - 1$$

con dato iniziale $\xi(0) = 0$ ed energia meccanica $E = 0$.

(3.1) Scrivere la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione $D = C \circ B$ e determinare la forma di C e B .

(3.2) Scrivere la legge del moto nei sistemi K e κ .

(3.3) Determinare la velocità assoluta \mathbf{v} e la velocità relativa \mathbf{v}' .

(3.4) Scrivere la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(3.5) Scrivere la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(3.6) Determinare la forza centrifuga e la forza di Coriolis che agiscono sul punto P .