Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2009/2010

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (05-07-2010)

Esercizio 1. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x}_1 = x_1, \qquad \dot{x}_k = \sum_{i=1}^{k-1} x_i + kx_k, \quad 2 \le k \le n,$$

con $n \in \mathbb{N}$. Se ne trovi la soluzione generale.
[*Suggerimento.* Può essere utile il cambiamento di variabili $y_k = x_1 + \ldots + x_k$, $k = 1, \ldots, n$.]

Esercizio 2. [14] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = -y^2 + \left(2\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2 - 4x\mathrm{e}^{-x}\left(2\mathrm{e}^{-x} - 1\right). \end{cases}$$

(2.1) [1] Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = x\left(y^2 - \left(2\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^2\right)$$

è una costante del moto.
(2.2) [3] Si dimostri che l'equazione $2(1 - 2x)\mathrm{e}^{-x} = 1$ ha un'unica soluzione $x_0 \in (0, \log 2)$.
(2.3) [2] Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico, utilizzando anche il punto (2.2).
(2.3) [3] Se ne discuta la stabilità.
(2.4) [2] Si studino le curve di livello della funzione $H(x, y)$.
(2.5) [2] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema, indicando in particolare i versi di percorrenza.
(2.6) [1] Si individuino i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

Esercizio 3. [8] Si consideri il sistema dinamico lineare descritto dalle equazioni

$$\dot{x}_k = x_{n+1-k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

(3.1) [4] Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'origine è un punto d'equilibrio instabile.
(3.2) [4] Si scriva esplicitamente la soluzione generale.

Esercizio 4. [4] Si derivi l'espressione analitica della forza di Coriolis e si discuta come agisce su un punto materiale in un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 5. [12] Si considerino le equazioni di Eulero per un sistema rigido libero.
(5.1) [1] Si definisca il momento angolare del sistema rigido.
(5.2) [2] Si derivino le equazioni a partire dalla conservazione del momento angolare.
(5.3) [4] Si determinino i punti d'equilibrio a seconda dei valori dei momenti principali d'inerzia I_1, I_2, I_3.
(5.4) [2] Se ne discuta la stabilità nel caso $I_1 = I_2 = I_3$.
(5.5) [3] Se ne discuta la stabilità nel caso $I_1 = I_2 < I_3$.

Esercizio 6. [6] Si consideri il problema dei due corpi.
(6.1) [2] Si discutano le ipotesi sul sistema e si derivino le equazioni.
(6.2) [2] Si discuta la trasformazione che porta alla coordinata del centro di massa e alla coordinata relativa e, in particolare, si mostri che è una trasformazione regolare invertibile.
(6.3) [2] Si dimostri che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.