Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2009/2010

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova scritta (08-06-2010)

Esercizio 1. [10] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con condizioni iniziali $x(0) = (1, 2, 3)$. Si calcoli la soluzione.

Esercizio 2. [14] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y\left(x^2+1\right)^2, \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 - 1 - y^2 - x^2y^2\right). \end{cases}$$

(2.1) [1] Si verifichi che la funzione $H(x, y) = y^2(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2$ è una costante del moto.
(2.2) [2] Si determinino i punti d'equilibrio.
(2.3) [3] Se ne discuta la stabilità.
(2.4) [3] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(2.5) [1] Si mostri che la traiettoria $(x(t), y(t))$ con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è asintotica.
(2.6) [4] Si mostri che esiste una funzione $F : [0, 1) \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$F(x(t)) = t, \qquad F(0) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^-} F(x) = \infty,$$

con $x(t)$ come al punto (2.5), e si calcoli esplicitamente F.

Esercizio 3. [8] Si consideri un sistema dinamico planare $\dot{x} = f(x)$, con f di classe C^1, tale che tutte le circonferenze di centro l'origine e raggio intero siano invarianti. Si indichi con $L_\omega(x)$ l'insieme ω-limite di x.
(3.1) [2] Dimostrare che $L_\omega(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.
(3.2) [2] Si determinino dei punti x per i quali si possa calcolare esplicitamente $L_\omega(x)$.
(3.3) [2] Dare delle condizioni per cui il sistema non ammetta cicli limite.
(3.4) [2] Dare un esempio esplicito di sistema che abbia le proprietà considerate.

Esercizio 4. [4] Si discuta che espressione analitica assume e come agisce la forza centrifuga su un punto materiale in un sistema di riferimento mobile.

Esercizio 5. [6] Si consideri il sistema costituito da un punto materiale in $\mathbb{R}^3$, soggetto a una forza che dipende solo dalla distanza da un asse fissato.
(5.1) [4] Dimostrare che l'operatore gradiente in coordinate cilindriche (ρ, θ, z) è dato da

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

(5.2) [2] Utilizzare il risultato per dimostrare che la forza considerata è conservativa.

Esercizio 6. [8] Si consideri il sistema rigido costituito da un disco infinito di massa totale m e densità di massa

$$\rho(x, y) = \frac{m}{2\pi a^2} e^{-(x^2+y^2)/(2a^2)},$$

con $a > 0$.
(6.1) [3] Si definiscano gli assi d'inerzia e i momenti principali d'inerzia di un sistema rigido continuo non omogeneo (ovvero con densità di massa non costante).
(6.2) [2] Si determinino gli assi d'inerzia del disco considerato.
(6.3) [3] Se ne calcolino i momenti principali d'inerzia.