Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2009/2010

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prima prova d'esonero (13-04-2010)

<u>Esercizio 1.</u> [8] Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico in $\mathbb{R}^n$, con f di classe C^1 tale che $|f(x)| \leq C|x|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $C > 0$.
(1.1) [5] Si dimostri che le soluzioni $\varphi(t, \bar{x})$ sono definite globalmente in t per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
(1.2) [3] Si dimostri che $|\mathrm{e}^{-Ct}\varphi(t, \bar{x})| < \infty$ per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e ogni $t \in \mathbb{R}$.

<u>Esercizio 2.</u> [12] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + x\left(x^2 - 1\right), \\ \dot{y} = -\left(3x^2 - 1\right)\left(y - 4x\left(x^2 - 1\right)\right). \end{cases}$$

(2.1) [1] Si dimostri che la funzione

$$H(x, y) = \left(y - x\left(x^2 - 1\right)\right)\left(y + 2x\left(x^2 - 1\right)\right)$$

è una costante del moto.
(2.2) [3] Si determinino i punti d'equilibrio.
(2.3) [4] Se ne studi la stabilità.
(2.4) [4] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

<u>Esercizio 3.</u> [8] Sia x_0 un punto d'equilibrio per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Sia $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che
(i) $W(x_0) = 0$ e $W(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$,
(ii) $\dot{W}(x) \leq -W(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
(3.1) [3] Si dimostri che x_0 è un punto d'equilibrio asintoticamante stabile.
(3.2) [5] Se ne stimi il bacino d'attrazione.

<u>Esercizio 4.</u> [8] Sia dato il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x, y) = \left(x^2 + 1\right) y^2.$$

(4.1) [1] Si determinino i punti d'equilibrio.
(4.2) [2] Se ne studi la stabilità.
(4.3) [2] Si studino le curve di livello della funzione V.
(4.4) [3] Si studi qualitativamente il sistema.

<u>Esercizio 5.</u> [6] Sia x_0 un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, con $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Si indichi con $L_\omega(\bar{x})$ l'insieme ω-limite del punto $\bar{x}$. Si dimostri che se $x_0 \in L_\omega(\bar{x})$ allora $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$ (ovvero $L_\omega(\bar{x})$ consiste del solo punto x_0). [*Suggerimento.* Si può procedere per assurdo.]

<u>Esercizio 6.</u> [10] Sia $n \geq 2$. Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x}_1 = 0, \qquad \dot{x}_k = x_{k-1}, \qquad k = 2, \ldots, n.$$

(6.1) [4] Si dimostri che le soluzioni divergono al più polinomialmente nel tempo t. [*Suggerimento.* Si può scrivere esplicitamente la matrice del sistema e calcolarne gli autovalori.]
(6.2) [6] Si calcolino esplicitamente le soluzioni.