Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

FM210 - Fisica Matematica 1

Prova scritta (09-06-2011)

Esercizio 1. [8] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali arbitrarie $x(0) = \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Esercizio 2. [4] Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|+1}, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

e si discuta l'esistenza ed eventuale unicità delle soluzioni al variare del dato iniziale x_0.

Esercizio 3. [10] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 2$ sottosposto a una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = 4x^2 - 6x - \log x^2.$$

(3.1) [1] Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
(3.2) [2] Si determinino i punti d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3.3) [3] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
(3.4) [1] Si dimostri in particolare che tutte le traiettorie non d'equilibrio sono periodiche.
(3.5) [3] Si consideri lo stesso sistema in presenza d'attrito: si determinino i nuovi punti d'equilibrio e si dimostri che tutte le traiettorie non d'equilibrio tendono asintoticamente a un punto d'equilibrio.

Esercizio 4. [6]
(4.1) [3] Si enunci e dimostri il teorema di Dirichlet sulla stabilità dei punti d'equilibrio che corrispondono a punti di minimo isolati dell'energia potenziale.
(4.2) [3] Si mostri la necessità della condizione che i punti siano isolati.

Esercizio 5. [8] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo una guida di equazione $y = x + \sin x$, in modo tale che sua proiezione sull'asse x sia $x_{O'} = ut$, con $u > 0$. L'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z, mentre l'asse ξ si mantiene tangente alla guida. Un punto materiale P di massa m si muove nel sistema di riferimento K con velocità costante $v > 0$ lungo l'asse ξ; all'istante iniziale il punto P si trova in O'.
(5.1) [2] Si determini la trasformazione rigida $D\colon K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B.
(5.2) [1] Si dimostri che il moto avviene nella regione $x \geq 0, y \geq 0$.
(5.3) [3] Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le velocità di trascinamento rotazionale e traslazionale del punto P.
(5.4) [2] Si determinino a forza centrifuga, la forza di Coriolis e la forza inerziale di rotazione che agiscono sul punto P.

Esercizio 6. [6] Si consideri un sistema rigido costituito da N punti materiali e si indichino con I_1, I_2, I_3 i suoi momenti principali d'inerzia.
(6.1) [4] Si dimostri che $I_1 \leq I_2 + I_3$, $I_2 \leq I_1 + I_3$, $I_3 \leq I_1 + I_2$.
(6.2) [2] Si discuta se può valere il segno uguale in una o più delle diseguaglianze precedenti.