

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

FM210 - Fisica matematica 1

PROVA SCRITTA (10-01-2011)

ESERCIZIO 1. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_k = x_{k-1}, \quad k \geq 2,$$

e si definisca $\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$.

(1.1) [2] Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $x_k(t) = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{t^p}{p!} x_{k-p}(0)$.

(1.2) [2] Si dimostri che se $\sigma(0)$ è assolutamente convergente lo è anche $\sigma(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(1.3) [2] Nel caso in cui $\sigma(0)$ sia assolutamente convergente, si calcoli $\sigma(t)$ in termini di $\sigma(0)$ e t .

ESERCIZIO 2. [6] Sia $\mathcal{A}_n$ lo spazio delle matrici antisimmetriche $n \times n$.

(2.1) [2] Si verifichi con conto esplicito che $\det A = 0$ per $A \in \mathcal{A}_3$.

(2.2) [2] Sia ora n un numero dispari qualsiasi: si ha ancora $\det A = 0$ per ogni $A \in \mathcal{A}_n$?

(2.3) [2] E se n è pari?

ESERCIZIO 3. [14] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y(y^2 - 8x^2 - 4), \\ \dot{y} = 8x[4y^2 + 3(x^2 - 1)(x^2 - 3)]. \end{cases}$$

(3.1) [2] Si dimostri che la funzione $H(x, y) = (y^2 - f(x))(y^2 - g(x))$, con

$$f(x) = 2(x-1)^2(2-x), \quad g(x) = 2(x+1)^2(2+x),$$

è una costante del moto per il sistema.

(3.2) [4] Si determinino i punti d'equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

(3.4) [4] Si studino le curve di livello della funzione $H(x, y)$.

(3.5) [2] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

(3.6) [2] Si individuino i dati iniziali che generano moti periodici e quelli che generano moti asintotici.

ESERCIZIO 4. [4] Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 in $\mathbb{R}^3$, di masse rispettivamente m_1 e m_2 , che interagiscano attraverso una forza centrale. Indicando con $q_1(t)$ e $q_2(t)$ le coordinate dei punti P_1 e P_2 e con $\dot{q}_1(t)$ e $\dot{q}_2(t)$ le rispettive velocità, si determinino quali relazioni debbano soddisfare i dati iniziali perché il moto dei due punti materiali avvenga lungo una retta.

ESERCIZIO 5. [12] Un pupazzo meccanico di massa m , dopo la carica, si muove in linea retta con velocità costante v . Un disco di raggio R ruota con velocità angolare costante ω intorno al proprio asse. Il pupazzo meccanico, una volta caricato, è posto sul bordo del disco e lasciato libero di muoversi diretto verso il centro del disco. Si scelgano un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, che abbia come origine O il centro del disco e come asse z l'asse del disco, e un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$, che abbia $O' = O$ e l'asse ζ parallelo all'asse z , che ruoti intorno all'asse ζ con velocità angolare ω e che coincida con κ all'istante $t = 0$. Si schematizzi il pupazzo come un punto materiale di massa m : nel sistema di riferimento K le equazioni del moto assumono la forma

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F}_{\text{Cor}} + \mathbf{F}_{\text{cf}} + \mathbf{F}_{\text{attr}},$$

dove $\mathbf{Q}$ sono le coordinate del pupazzo nel sistema K , $\mathbf{F}_{\text{Cor}}$ è la forza di Coriolis, $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ è la forza centrifuga e $\mathbf{F}_{\text{attr}}$ è la forza d'attrito. Si può imporre la condizione iniziale fissando $\mathbf{Q}(0) = (R, 0, 0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = (-v, 0, 0)$.

(5.1) [2] Si scrivano le espressioni esplicite di $\mathbf{F}_{\text{Cor}}$ e $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ e si spieghi perché nelle equazioni del moto non compaia la forza inerziale di rotazione.

(5.2) [2] Si fissi $\mathbf{F}_{\text{attr}}$ in modo che annulli la forza centrifuga (questo equivale a richiedere che il pupazzo, se posto sul disco senza carica, cioè con velocità nulla, si muova solidalmente al disco, cioè sia fermo nel sistema K). Si descriva quindi qualitativamente il moto del pupazzo; in particolare si mostri che il pupazzo esce fuori dal disco in un tempo finito.

(5.3) [6] Fissato $\mathbf{F}_{\text{attr}}$ come detto al punto precedente, si risolvano esplicitamente le equazioni del moto e si individui il punto in cui il pupazzo esce fuori dal disco.

(5.4) [2] Cosa succede se si fissa invece $\mathbf{F}_{\text{attr}} = \mathbf{0}$?

ESERCIZIO 6. [6] Si definisca l'operatore d'inerzia per un sistema rigido costituito da N punti materiali di masse $m_1, \dots, m_N$ e si ricavi l'espressione esplicita della matrice che lo rappresenta in un sistema di coordinate arbitrario.