

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

FM210 - Fisica Matematica 1

PROVA SCRITTA (15-02-2011)

ESERCIZIO 1. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali arbitrarie $x(0) = \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

ESERCIZIO 2. [4] Si consideri il problema di Cauchy in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{1/n}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

(2.1) [3] Per n dispari si mostri che la soluzione non è unica, esibendo esplicitamente due soluzioni e, più in generale, facendo vedere che esistono infinite soluzioni.

(2.2) [1] Cosa cambia nella discussione per n pari?

ESERCIZIO 3. [12] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto a una forza di energia potenziale $V(x) = 2x^6 - 15x^4 + 24x^2$.

(3.1) [1] Si consideri il sistema dinamico associato nel piano $(x, y) = (x, \dot{x})$ e si dimostri che la funzione

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) = \frac{1}{2}y^2 + 2x^6 - 15x^4 + 24x^2$$

è una costante del moto per tale sistema.

(3.2) [4] Si determinino i punti d'equilibrio e se ne discuta la stabilità.

(3.3) [3] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

(3.4) [4] Si scriva il sistema gradiente $\dot{x} = -\partial H/\partial x$, $\dot{y} = -\partial H/\partial y$, con $H = H(x, y)$ come al punto (3.1), e lo si studi qualitativamente. In particolare si determini il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 4. [10] Si consideri il sistema dinamico planare descritto, in coordinate polari, da

$$\dot{\rho} = f(\rho) := \rho \prod_{i=1}^n (\rho_i - \rho), \quad \dot{\theta} = g(\rho, \theta),$$

dove $g(\rho, \theta) > 0$ e $\rho_n > \rho_{n-1} > \dots > \rho_1 > 0$.

(4.1) [4] Si dimostri che il sistema ammette n cicli limite.

(4.2) [3] Si discuta quali cicli sono attrattivi e quali repulsivi.

(4.3) [3] Si determini per quali valori di n il moto è globalmente limitato nel piano (i.e. nessuna soluzione va all'infinito).

ESERCIZIO 5. [12] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo una guida di equazione $y = f(x)$, con f di classe C^2 , in modo tale che la sua proiezione sull'asse x sia $x_{O'} = t \sin t$. L'asse ζ si mantiene parallelo all'asse z , mentre il piano (ξ, η) ruota con velocità angolare costante $\omega = 1$ intorno all'asse ζ ; all'istante iniziale gli assi x e ξ sono paralleli. Un punto materiale P di massa m si muove nel sistema di riferimento K con velocità costante v lungo l'asse ξ ; all'istante iniziale il punto P si trova in O' .

(5.1) [2] Si determini la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B .

(5.2) [4] Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le velocità di trascinamento rotazionale e traslazionale del punto P .

(5.3) [3] Si definisca $\{t_k\}$ come l'insieme dei tempi tali che $x_{O'}(t_k) = 1$: si dimostri che $\{t_k\}$ contiene infiniti elementi e che $t_k = \pi k + a_k$ con $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$.

(5.4) [3] Si scelga v in modo che il punto P attraversi l'asse x in ogni istante t_k e, utilizzando il risultato (5.3), si calcoli il valore che assume la sua coordinata x in tali istanti per $k \rightarrow \infty$.

ESERCIZIO 6. [6] Dato un sistema rigido planare, invariante per riflessioni rispetto a un asse del piano, si determinino i suoi assi di inerzia. Si verifichi che una lastra rettangolare omogenea soddisfa tale proprietà e se ne calcolino esplicitamente i momenti principali d'inerzia.