Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

FM210 - Fisica Matematica 1

Prima prova d'esonero (04-11-2010)

Esercizio 1. [4] Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico in $\mathbb{R}^n$, con f di classe C^1, e sia γ una curva costituita da punti d'equilibrio. Si dimostri che i punti di γ possono essere punti d'equilibrio stabile o instabile, ma non punti d'equilibrio asintoticamente stabili.

Esercizio 2. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e se ne calcoli la soluzione con condizioni iniziali arbitrarie $x(0) = \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Esercizio 3. [12] Si consideri il sistema dinamico planare

$$\dot{x} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, \qquad \dot{y} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

(3.1) [1] Si trovi una costante del moto $H(x, y)$ non banale per il sistema.
(3.2) [2] Si determinino i punti d'equilibrio e se ne studi la stabilità.
(3.3) [4] Si dimostri che le soluzioni sono definite globalmente nel tempo. [*Suggerimento:* Si verifichi che il campo vettoriale è limitato e se ne deduca l'asserto.]
(3.4) [5] Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 4. [6] Sia N la matrice $n \times n$ di elementi

$$N_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \delta_{i-1,j}, & i \geq 2, \end{cases}$$

con $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{i,j} = 0$ altrimenti, e si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari $\dot{x} = Nx$.
(4.1) [3] Si dimostri per induzione che per $1 \leq p \leq n - 1$ si ha

$$(N^p)_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \leq p\ , \\ \delta_{i-p,j}, & i \geq p + 1. \end{cases}$$

e ne deduca che N è nilpotente di ordine n.
(4.2) [1] Si dimostri che le soluzioni del sistema di equazioni divergono al più polinomialmente in t.
(4.3) [2] Si individui l'insieme dei dati iniziali che divergono più velocemente in t. [*Suggerimento:* Si dimostri che la soluzione con dato iniziale $\bar{x}$ con $\bar{x}_i = \delta_{i,j}$ diverge proporzionalmente a t^{n-j}.]

Esercizio 5. [10] Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$$\dot{x} = -x\,(1 - x^2)\,(4 - x^2)\,.$$

(5.1) [2] Si determinino i punti d'equilibrio e se ne studi la stabilità.
(5.2) [3] Si dimostri che ogni soluzione non d'equilibrio tende asintoticamente a un punto d'equilibrio.
(5.3) [2] Si consideri il sistema planare di equazioni

$$\dot{x} = -x\left(1 - x^2 - y^2\right)\left(4 - x^2 - y^2\right) + y, \qquad \dot{y} = -y\left(1 - x^2 - y^2\right)\left(4 - x^2 - y^2\right) - x,$$

e, passando a coordinate polari, si utilizzi il risultato (5.2) per dimostrare che il sistema ammette un punto d'equilibrio e due cicli limiti; se ne studi la stabilità.
(5.4) [3] Si calcoli $L_\omega(z)\ \forall\ z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ per il sistema al punto (5.3).

Esercizio 6. [4] Si consideri il sistema dinamico planare descritto dalle equazioni

$$\dot{x} = G(x, y)\,\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -G(x, y)\,\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad H(x, y) = x^2 + y^2,$$

dove G è una funzione arbitraria di classe C^1.
(6.1) [1] Si dimostri che H è una costante del moto.
(6.2) [1] Si dimostri che il moto avviene su circonferenze di centro l'origine.
(6.3) [1] Si diano delle condizioni su G perché tutti i moti con dati iniziali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ siano periodici.
(6.4) [1] Si diano delle condizioni su G perché il sistema abbia infiniti punti d'equilibrio.