

Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2010/2011

FM210 - Fisica Matematica 1

SECONDA PROVA D'ESONERO (05-01-2011)

ESERCIZIO 1. [8] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo) tale che O' si muova lungo l'asse x con legge oraria $x_{O'}(t) = t$ e l'asse ζ sia parallelo all'asse z , mentre il piano (ξ, η) ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare ω costante. Un omino (da schematizzare come un punto materiale) si muove lungo l'asse ξ del sistema di riferimento K con velocità costante v . All'istante iniziale $t = 0$ i due sistemi di riferimento coincidono e l'omino si trova in O' . Si risponda alle seguenti domande.

- (1.1) [1] Si descriva il moto dell'omino nel sistema di riferimento κ .
- (1.2) [1] Si determini la velocità assoluta dell'omino.
- (1.3) [1] Si determini la sua velocità relativa.
- (1.4) [1] Si determini la sua velocità di trascinamento (sia la componente traslatoria sia quella rotatoria).
- (1.5) [2] All'istante $t = 0$ l'omino lascia cadere un fiocco per terra: che valore deve assumere v perché l'omino ripassi per l'origine e possa quindi raccogliere il fiocco?
- (1.6) [2] Come cambia la discussione precedente se $x_{O'}(t) = t^2$?

ESERCIZIO 2. [8] Si consideri il sistema gradiente planare

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad V(x, y) = y^2 + 2x^2(x - 1).$$

- (2.1) [1] Si determinino i punti d'equilibrio.
- (2.2) [2] Se ne studi la stabilità.
- (2.3) [2] Si studino le curve di livello della funzione V
- (2.4) [2] Si studi qualitativamente il sistema.
- (2.5) [1] Si determini il bacino d'attrazione di eventuali punti d'equilibrio asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 3. [16] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^4}{|x^2 - 1|} + (\alpha - 1)x^2,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $\alpha = 1$ si risponda alle seguenti domande.

- (3.1) [1] Si scrivano l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (3.2) [2] Si determinino i punti d'equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (3.3) [3] Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
- (3.4) [2] Si discuta qualitativamente il moto del sistema.
- (3.5) [7] Si discuta come cambia lo scenario al variare del parametro α in \mathbb{R} .
- (3.6) [1] Si dimostri che per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intervallo $|x| < 1$ è invariante.

ESERCIZIO 4. [8] Si consideri il sistema dinamico planare $\dot{x} = f(x)$, con f di classe C^1 , e si assuma che il sistema ammetta due cicli limite γ_1 e γ_2 repulsivi, tali che (i) γ_2 sia contenuto all'interno dell'insieme aperto limitato con frontiera γ_1 e (ii) non ci siano punti d'equilibrio nella regione \mathcal{A} compresa tra γ_1 e γ_2 .

- (4.1) [3] Si dimostri che esiste almeno un ciclo limite attrattivo in \mathcal{A} .
- (4.2) [5] Si può rimuovere l'ipotesi (ii) perché valga lo stesso risultato?

ESERCIZIO 5. [8] Si consideri il sistema rigido costituito da 4 punti di massa m_1, m_2, m_3, m_4 , con $m_k = k$, disposti in senso orario in corrispondenza dei vertici di un quadrato di lato ℓ .

- (5.1) [1] Si determini il centro di massa del sistema.
- (5.2) [3] Si determinino gli assi d'inerzia.
- (5.3) [4] Si calcolino i momenti principali d'inerzia.

ESERCIZIO 6. [4] Si consideri un sistema rigido costituito da N punti in \mathbb{R}^3 .

- (6.1) [1] Si definisca l'energia cinetica del sistema.
- (6.2) [3] Si enunci e dimostri il teorema di König.