

**MAT1 - Matematica 1**

PRIMA PROVA D'APPELLO (31-01-2013)

ESERCIZIO 1. [4+2] Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - x}{x^2 + 1 - x},$$

(1.1) si calcolino i limiti  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;

(1.2) si calcoli  $f'(x)$  e si determini in particolare  $f'(0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ ;

(1.3) FACOLTATIVO: si determinino due intervalli  $A$  e  $B$  tali che  $f : A \rightarrow B$  sia iniettiva e suriettiva.

ESERCIZIO 2. [4] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x^2} - 2 + \cos x}{x(e^x - e^{-x})}.$$

ESERCIZIO 3. [4+1] Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli la matrice  $M = A + B$ ;

(3.2) si determini quali delle tre matrici  $A, B, M$  siano invertibili e se ne calcolino le inverse;

(3.3) si determinino gli autovalori e gli autovettori di  $M$ ;

(3.4) FACOLTATIVO: si diagonalizzi la matrice  $M$ .

ESERCIZIO 4. [4+1] Dati i due vettori nello spazio  $\vec{v} = (1, 1, 1)$  e  $\vec{w} = (4, 1/2, 0)$ ,

(4.1) si determini il vettore  $2\vec{v} - 2\vec{w}$ ;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ;

(4.3) si determini l'angolo compreso tra i due vettori;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ;

(4.5) FACOLTATIVO: si discuta se i tre vettori  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \wedge \vec{w}$  siano linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 5. [4] Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int (\ln x)^3 dx.$$

ESERCIZIO 6. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

In particolare si determini il dominio della funzione, si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, convessa o concava e si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.  
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**