

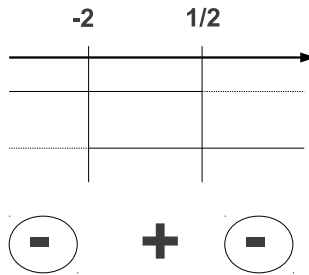
Esercitazione 1 - Soluzioni

Francesco Davì

5 ottobre 2012

Esercizio 1

- (a) Si ottiene $5x \leq -18$ (o equivalentemente $-5x \geq 18$), la cui soluzione è $x \leq -\frac{18}{5}$.
- (b) Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 < 3x \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ -2x-1 < 3x \end{cases}$. Il primo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$ la cui soluzione è $x > 1$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases}$ che ha come soluzione l'insieme vuoto, non esistono cioè valori di x che soddisfano tale sistema di disequazioni (in simboli $\nexists x \in \mathbb{R}$). Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è uguale a $x > 1$.
- (c) Deve essere $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$. Inoltre $\frac{3-x}{x+2} - 1 = \frac{3-x-x-2}{x+2} = \frac{1-2x}{x+2}$, quindi la disequazione in esame è equivalente a $\frac{1-2x}{x+2} \leq 0$. Esistono due approcci per risolvere la disequazione fratta:
- determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi di disequazioni $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 1-2x \leq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$. In questo caso si ottiene $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x < -2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > -2 \end{cases}$, le cui soluzioni sono rispettivamente $x < -2$ e $x \geq \frac{1}{2}$, la cui unione è: $x < -2$ oppure $x \geq \frac{1}{2}$;
 - studiare il segno delle espressioni al numeratore e al denominatore e determinare gli intervalli in cui sono discordi. In questo caso si considera $1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$ e $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Gli intervalli cercati sono quindi $x < -2$ oppure $x \geq \frac{1}{2}$ come è possibile verificare anche graficamente con il seguente schema:



- (d) $a = 1 > 0$ e $\Delta = 25 > 0$. Le radici di $x^2 + x - 6 = 0$ sono $x_1 = -3$ e $x_2 = 2$, quindi la soluzione è: $x < -3$ oppure $x > 2$.
- (e) Si ottiene $x^2 + 4x \leq 0$ che è equivalente a $x(x + 4) \leq 0$. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 4 \leq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x \leq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$. Il primo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -4 \end{cases}$ che non è soddisfatto per alcun valore di x , in simboli $\nexists x \in \mathbb{R}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -4 \end{cases}$ la cui soluzione è $-4 \leq x \leq 0$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-4 \leq x \leq 0$.
- (f) Si ottiene $x^2 - 2 < 0$. $a = 1 > 0$ e $\Delta = 8 > 0$. Le radici di $x^2 - 2 = 0$ sono $x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{2}$, quindi la soluzione è: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.
- (g) $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$, quindi la soluzione è: $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (h) Si ottiene $x^2 + 9 \leq 0$. $a = 1 > 0$ e $\Delta = -36 < 0$, quindi la soluzione è: $\nexists x \in \mathbb{R}$.
- (i) $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0$. Le radici di $x^2 + 2x + 1 = 0$ sono $x_1 = x_2 = -1$, quindi la soluzione è: $x = -1$.
- (j) $a = 3 > 0$ e $\Delta = -22 < 0$, quindi la soluzione è: $\nexists x \in \mathbb{R}$.
- (k) $a = 1 > 0$ e $\Delta = \frac{1}{2} > 0$. Le radici di $x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x + 1 = 0$ sono $x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi la soluzione è: $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (l) Deve essere $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$ e $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Inoltre $\frac{3x+1}{x+3} - \frac{x-2}{x+1} = \frac{(3x+1)(x+1) - (x-2)(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \frac{3x^2+3x+x+1 - (x^2+3x-2x-6)}{x^2+x+3x+3} = \frac{2x^2+3x+7}{x^2+4x+3}$. Bisogna quindi determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} 2x^2 + 3x + 7 > 0 \\ x^2 + 4x + 3 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x^2 + 3x + 7 < 0 \\ x^2 + 4x + 3 > 0 \end{cases}$. Per l'equazione $2x^2 + 3x + 7 = 0$ vale $a = 2 > 0$ e $\Delta = -47 < 0$. Per l'equazione

$x^2 + 4x + 3 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 4 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = -3$ e $x_2 = -1$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ -3 < x < -1 \end{cases}$ la cui soluzione è: $-3 < x < -1$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} \nexists x \in \mathbb{R} \\ x < -3 \text{ oppure } x > -1 \end{cases}$ la cui soluzione è $\nexists x \in \mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-3 < x < -1$.

- (m) Deve essere $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Si ottiene $\frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}{x+1} > 0$. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$. Per l'equazione $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ vale $a = 1 > 0$ e $\Delta = 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x \neq \sqrt{2} \\ x > -1 \end{cases}$ la cui soluzione è: $-1 < x < \sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} \nexists x \in \mathbb{R} \\ x < -1 \end{cases}$ la cui soluzione è $\nexists x \in \mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-1 < x < \sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$.
- (n) Deve essere $3 + 2x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -\frac{3}{2}$ che è soddisfatto $\forall x \in \mathbb{R}$, in quanto non esistono numeri reali il cui quadrato sia un numero negativo, quindi non bisogna escludere alcun valore di x dall'insieme delle soluzioni della disequazione in esame. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} x + 7 \geq 0 \\ 3 + 2x^2 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + 7 \leq 0 \\ 3 + 2x^2 > 0 \end{cases}$. Per l'equazione $3 + 2x^2 = 0$ vale $a = 2 > 0$ e $\Delta = -24 < 0$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x \geq -7 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases}$ la cui soluzione è: $\nexists x \in \mathbb{R}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq -7 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ la cui soluzione è $x \leq -7$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $x \leq -7$.
- (o) Deve essere $2 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 2 \Rightarrow x \neq -\sqrt{2}$ e $x \neq \sqrt{2}$. Bisogna determinare l'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ 2 - x^2 < 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + 5 \leq 0 \\ 2 - x^2 > 0 \end{cases}$. Per l'equazione $2 - x^2 = 0$ vale $a = -1 < 0$ e $\Delta = 8 > 0$. Le radici di tale equazione sono $x_1 = -\sqrt{2}$ e $x_2 = \sqrt{2}$. Il primo sistema è allora equivalente a $\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x < -\sqrt{2} \text{ oppure } x > \sqrt{2} \end{cases}$ la cui soluzione

è: $-\frac{5}{2} \leq x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$. Il secondo sistema è equivalente a $\begin{cases} x \leq -\frac{5}{2} \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$ la cui soluzione è $\nexists x \in \mathbb{R}$. Allora l'unione delle soluzioni dei due sistemi, e quindi la soluzione dell'esercizio, è: $-\frac{5}{2} \leq x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$.

- (p) Il modulo di un'espressione è sempre positivo, quindi la disequazione è soddisfatta per qualsiasi valore di x , in simboli $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (q) L'espressione $|x - 3|$ è sempre positiva ma deve valere $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$, in quanto il segno della disequazione è strettamente positivo, escludendo quindi il caso in cui l'espressione è uguale a zero. Allora il risultato della disequazione è proprio $x \neq 3$.