

Lezioni di MAT1 - A. A. 2012–2013

Guido Gentile

Ultima versione: 20 Dicembre 2012

(Attenzione: le note potrebbero contenere degli errori)

1 I numeri reali

1.1 Notazioni

Introduciamo le seguenti notazioni:

1. Dato un insieme X , $x \in X$ significa che x è un elemento di X .
2. Dato un insieme X , se Y è un sottoinsieme di X scriveremo $Y \subset X$.
3. Dati due insiemi A e B , $A \cup B$ (*unione* di A e B) indica l'insieme i cui elementi appartengono ad A oppure a B , i.e. $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$.
4. Dati due insiemi A e B , $A \cap B$ (*intersezione* di A e B) indica l'insieme i cui elementi appartengono sia ad A sia a B , i.e. $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.
5. Dato un sottoinsieme Y di un insieme X , indicheremo con $X \setminus Y$ l'insieme dei punti di X che non appartengono a Y , i.e. $X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}$.
6. $\forall x$ significa “per ogni x ”.
7. $\exists x$ significa “esiste x ”, mentre $\exists! x$ significa “esiste un unico x ”.
8. Indichiamo con $\emptyset$ l'insieme vuoto (l'insieme che non contiene alcun elemento).
9. Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, si dice *complementare* di Y in X l'insieme Y^c dei punti di X che non appartengono a Y , i.e. $Y^c = \{x \in X : x \notin Y\}$.
10. Dati due insiemi A e B , $A \times B$ (*prodotto cartesiano* di A e B) indica l'insieme ottenuto prendendo tutte le coppie ordinate (x, y) , con $x \in A$ e $y \in B$.

Osservazione: se $Y \subset X$ si ha $X \setminus Y = X \cap Y^c$.

1.2 Numeri naturali

L'insieme dei *numeri naturali* è l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Sui numeri naturali si possono definire un'operazione di addizione (+) e un'operazione di moltiplicazione ($\cdot$): $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si possono considerare la loro somma $p + q \in \mathbb{N}$ e il loro prodotto $p \cdot q \in \mathbb{N}$.

Proprietà dei numeri naturali:

1. Proprietà commutativa dell'addizione: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si ha $p + q = q + p$.
2. Proprietà commutativa della moltiplicazione: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si ha $p \cdot q = q \cdot p$.
3. Proprietà distributiva: $\forall p, q, n \in \mathbb{N}$ si ha $p \cdot (q + n) = p \cdot q + p \cdot n$.

Osservazione: nel seguito il prodotto di due numeri qualsiasi x, y sarà indicato indifferentemente come $x \cdot y$ oppure, più semplicemente, come xy .

Dato un numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il prodotto dei primi n numeri interi si chiama *fattoriale* di n e si indica con il simbolo $n!$. Si ha $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$, e così via. Si pone per definizione $0! = 1$. Si vede immediatamente che $n! = n \cdot (n - 1)! \forall n \in \mathbb{N}$. Dati $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, si definisce *coefficiente binomiale* il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si ha per esempio

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \dots, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Si vede subito che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Ricordiamo infine la *formula del binomio*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{n} a^n + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n.$$

Per $n = 2$ si ha $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, per $n = 3$ si ha $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, e così via.

1.3 Numeri interi

Equazioni di primo grado $x+p=q$: necessità di ampliare l'insieme dei numeri per trovare soluzioni (per esempio l'equazione $x+2=1$ non ammette soluzione in $\mathbb{N}$) $\implies$ insieme dei *numeri interi* $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.4 Numeri razionali

Equazioni $px = q$: necessità di ampliare l'insieme dei numeri per trovare soluzioni (per esempio l'equazione $2x = 3$ non ammette soluzione in $\mathbb{Z}$) $\implies$ insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Si ha $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. La rappresentazione di un numero razionale non è unica: per esempio $2/3$, $4/6$, $(-10)/(-15)$ rappresentano lo stesso numero. Tuttavia diventa unica se imponiamo che i due numeri siano primi tra loro (i.e. che non abbiano divisori comuni a parte 1): per esempio per tutti i numeri considerati prima scegliamo la rappresentazione $2/3$.

Rappresentazione dei numeri introdotti su una retta: i razionali sono “densi” sulla retta (comunque si fissa un intervallo si trova un numero razionale dentro quell'intervallo), ma sono tanti quanti i naturali (si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali).

Osservazione: il coefficiente binomiale introdotto in §1.2 è in generale un numero razionale.

1.5 Numeri reali

Equazioni di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$: necessità di ampliare l'insieme dei numeri per trovare soluzioni (per esempio l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette soluzione in $\mathbb{Q}$) $\implies$ insieme dei *numeri irrazionali* (numeri che non possono essere scritti sotto forma di frazione p/q , con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) $\implies$ insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$.

Asse reale: se fisso un'unità di misura sulla retta, allora a ogni punto della retta è associato un numero reale e viceversa (*corrispondenza biunivoca*). L'insieme $\mathbb{R}$ è *totalmente ordinato*: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ solo una delle tre possibilità può verificarsi: $x > y$, $x = y$, $x < y$. Su $\mathbb{R}$ si possono ancora definire le operazioni di addizione (+) e moltiplicazione ($\cdot$). Si ha $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. L'insieme dei numeri reali può essere caratterizzato astrattamente attraverso una serie di *assiomi*, da cui discendono tutte le proprietà.

1.6 Definizione assiomatica dei numeri reali

Definizione 1.1. *I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ con la seguente struttura:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ è definito $x + y \in \mathbb{R}$ (somma);
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ è definito $x \cdot y \in \mathbb{R}$ (prodotto);
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x + y = y + x$ (proprietà commutativa di +)
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa di +)
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa di $\cdot$)

6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa di $\cdot$);
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ sia ha $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (proprietà distributiva);
8. $\exists! 0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = 0 + x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro di $+$);
9. $\forall x \in \mathbb{R} \exists! y = -x$ tale che $x + y = 0$ (opposto)
10. $\exists! 1 \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro di $\cdot$);
11. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists! y = 1/x$ tale che $y \cdot x = x \cdot y = 1$ (inverso o reciproco);
12. esiste un ordinamento totale, i.e. una relazione tra coppie di elementi che goda delle seguenti proprietà:
 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $x \geq y$ (dicotomia);
 - $x \leq y$ e $y \leq z \implies x \leq z$ (proprietà transitiva);
 - $x \leq y$ e $y \leq x \implies x = y$ (proprietà antisimmetrica)
 - $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
13. $x \leq y \implies x + z \leq y + z \ \forall z \in \mathbb{R}$;
14. $0 \leq x$ e $0 \leq y \implies 0 \leq x \cdot y$.

Dalle proprietà sopra seguono proprietà interessanti, e.g.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $x \cdot 0 = 0$.
Dimostrazione: $x \cdot 0 = x \cdot (1 - 1) = x \cdot 1 - x \cdot 1 = x - x = 0$.
2. Se $x > 0$ allora $-x < 0$.
Dimostrazione: $x > 0 \implies x - x > -x \implies 0 > -x$.
3. Se $x, y \geq 0$ e $z \geq 0$ allora $x > y \implies x \cdot z > y \cdot z$.
Dimostrazione: se $x > y$ si ha $x - y > 0$, quindi $0 < (x - y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z \implies x \cdot z > y \cdot z$.
4. Se $x, y \geq 0$ e $z < 0$ allora $x > y \implies x \cdot z < y \cdot z$.
Dimostrazione: se $w > 0$ allora $x \cdot w > y \cdot w$ [per 3]; se $w = -z > 0$ [per 2] allora $x \cdot (-z) > y \cdot (-z) \implies -x \cdot z > -y \cdot z \implies y \cdot z - x \cdot z > 0$ [sommando $y \cdot z$] $\implies y \cdot z > x \cdot z$ [sommando $x \cdot z$].
5. $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $a^2 \geq 0$.
Dimostrazione: se $a \geq 0$ si ha $a^2 = a \cdot a \geq a \cdot 0 = 0$ [per 3]; se $a < 0$ si ha $-a > 0$ [per 2], quindi usando 4 con $x = -a, y = 0, z = a$ si trova $-a^2 = (-a) \cdot a = x \cdot z < y \cdot z = a \cdot 0 = 0$ [per 1] $\implies a^2 > 0$ [per 2].

In realtà gli assiomi sopra non sono sufficienti a caratterizzare completamente l'insieme dei numeri reali: occorre un ulteriore assioma. Diamo alcune definizioni preliminari.

Definizione 1.2. Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$. Diremo che (A, B) è una sezione di $\mathbb{R}$ se

1. $A \cup B = \mathbb{R}$ e $A \cap B = \emptyset$
2. $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$.

Definizione 1.3. Data una sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ diremo che $\ell \in \mathbb{R}$ è un elemento separatore della sezione se $a \leq \ell \leq b \forall a \in A$ e $\forall b \in B$.

Agli assiomi della Definizione 1.1 bisogna allora aggiungere il seguente *assioma di Dedekind*: per ogni sezione (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste un unico elemento separatore della sezione. L'assioma di Dedekind (detto anche *assioma di continuità* o *assioma di completezza*) garantisce che i numeri reali sono *continui*. In particolare è l'assioma di Dedekind che implica che i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta.

1.7 Numeri complessi

Equazioni di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ($x^2 + 1 = 0$): necessità di introdurre l'insieme dei *numeri complessi* $\mathbb{C}$. Esistenza di n radici nel campo complesso per qualsiasi equazione algebrica di grado n , $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, con $a_n \neq 0$ (*teorema fondamentale dell'algebra*). Si ha $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I numeri complessi sono numeri della forma $z = x + iy$, dove $i^2 = -1$ (i è chiamata unità immaginaria). I numeri reali si ottengono prendendo $y = 0$. I numeri complessi si possono rappresentare come coppie ordinate (x, y) di numeri reali nel piano (*piano complesso*): l'asse reale è individuata dai punti $(x, 0)$.

1.8 Intervalli

Un *intervallo* I è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, formato da tutti i punti compresi tra due estremi a e b , dove $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Si dice *chiuso* se $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ e *aperto* se $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Esistono anche intervalli che non sono né aperti né chiusi: intervalli *aperti a sinistra* ($I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$) e intervalli *aperti a destra* ($I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$).

Gli intervalli possono essere limitati (se sia a che b sono finiti) o illimitati: $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ con a, b finiti. In particolare $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Dato un qualsiasi intervallo $I \subset \mathbb{R}$ si ha $I \cup I^c = \mathbb{R}$ e $I \cap I^c = \emptyset$.

Si possono considerare anche sottoinsiemi più generali di $\mathbb{R}$, che non siano intervalli. Anche la nozione di insieme aperto e insieme chiuso in $\mathbb{R}$ è in realtà più generale di quella data sopra.

Esercizi:

1. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-1, 3]$ e $I_2 = (2, 5)$.
2. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-2, 0]$ e $I_2 = (1, 4)$.
3. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = (-4, 3)$ e $I_2 = (-3, 0)$.
4. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-4, 3]$ e $I_2 = [3, 5]$.

2 Funzioni reali di variabile reale

2.1 Piano cartesiano

Si definisce $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: quindi $\mathbb{R}^2$ è il *prodotto cartesiano* di $\mathbb{R}$ con se stesso, i.e. l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$.

Se si considera un sistema di assi ortogonali nel piano sui quali sia stata introdotta la stessa unità di misura (*sistema di riferimento*), si ha una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e gli elementi di $\mathbb{R}^2$. In particolare possiamo supporre che una delle due rette sia orizzontale e l'altra verticale: chiameremo *asse x* o *asse delle ascisse* la retta orizzontale e *asse y* o *asse delle ordinate* la retta verticale. Il piano reale in cui sia stato introdotto un sistema di riferimento si chiama *piano cartesiano*.

2.2 Estremo superiore ed estremo inferiore

Definizione 2.1. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diremo che un elemento $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A se $a \leq M \forall a \in A$. Se il massimo di A esiste si indica con $\max A$.

Definizione 2.2. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diremo che un elemento $m \in \mathbb{R}$ è il minimo di A se $a \geq m \forall a \in A$. Se il minimo di A esiste si indica con $\min A$.

Definizione 2.3. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diremo che un elemento $L \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se $a \leq L \forall a \in A$. Se esiste un maggiorante di A diremo che A è superiormente limitato.

Definizione 2.4. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diremo che un elemento $\ell \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se $a \geq \ell \forall a \in A$. Se esiste un minorante di A diremo che A è inferiormente limitato.

Definizione 2.5. Diremo che S è l'estremo superiore di A se è il minimo dei maggioranti di A . Si indica con $\sup A$.

Definizione 2.6. Diremo che s è l'estremo inferiore di A se è il massimo dei minoranti di A . Si indica con $\inf A$.

Esempi:

1. Se $A = [0, 1]$ si ha $\max A = 1$ e $\min A = 0$.
2. Se $A = (0, 1]$ si ha $\max A = 1$, mentre non esiste minimo; tuttavia $\inf A = 0$.
3. Se $A = (-1, 1)$ si ha $\inf A = -1$ e $\sup A = 1$ (massimo né minimo non esistono).
4. Se $A = (0, +\infty)$, si ha $\inf A = 0$; tuttavia A non è limitato superiormente.
5. Se $A = (-\infty, 1]$, si ha $\max A = \sup A = 1$; tuttavia A non è limitato inferiormente.

Osservazioni:

1. Non è detto che l'estremo superiore di un insieme A esista (e.g. $A = (1, +\infty)$). Tuttavia se esiste è unico.
2. Non è detto che esista il massimo di un insieme A (e.g. $A = [0, 1)$). Tuttavia se esiste $\max A = \sup A$. Quindi, in particolare, se esiste il massimo è unico.
3. Analoghe considerazioni valgono per minimo ed estremo inferiore.

Teorema 2.7. *Se un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, allora esiste $\sup A$. Se un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, allora esiste $\inf A$.*

Osservazione: La dimostrazione del teorema consiste nel far vedere (1) che l'insieme dei maggioranti di A e il suo complementare in $\mathbb{R}$ formano una sezione di $\mathbb{R}$ e (2) che l'elemento separatore della sezione appartiene all'insieme dei maggioranti.

2.3 Modulo di un numero reale

Il *modulo* o *valore assoluto* di x è definito come $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

Dalla definizione segue che:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$.
2. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $-x \leq y$ allora $|x| \leq y$.

Proprietà del modulo:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x + y| \leq |x| + |y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$, si ha $|x/y| \leq |x|/|y|$.
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Osservazione: la disuguaglianza in 5 è nota come *disuguaglianza triangolare*.

Dimostrazioni:

1. Se $x + y \geq 0$ si ha $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$; se $x + y < 0$ si ha $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$.
2. Sia $z = x - y \implies x = y + z$, quindi $|x| = |z + y| \leq |z| + |y| = |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$. Scambiando tra loro x e y si ottiene anche $|y| - |x| \leq |y - x| \forall x, y \in \mathbb{R}$. Poiché $|x - y| = |y - x|$ si ottiene quindi $\pm(|x| - |y|) \leq |x - y| \implies ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
3. Se $x, y > 0$ si ha $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$; se $x, y < 0$ si ha $|x \cdot y| = (-x) \cdot (-y) \leq |x| \cdot |y|$; se $y < 0 < x$ si ha $|x \cdot y| = -xy \leq |x| \cdot |y|$.
4. Segue da 3, prendendo $1/y$ invece di y .
5. Si ha $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$ [per 1].

Esercizi:

1. Rappresentare sul piano reale l'insieme dei punti (x, y) che verificano $|x| \leq |y|$.
2. Rappresentare sul piano reale l'insieme dei punti (x, y) che verificano $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

2.4 Funzione reale di variabile reale

Variabile: una grandezza che può assumere più valori: per esempio $x \in I$.

Definizione 2.8. *Funzione reale di variabile reale è una legge f che associa a ogni numero reale $x \in I$ un valore reale $f(x)$.*

Esempi: $f(x) = x^2, f(x) = x, f(x) = \sqrt{x}, f(x) = 1/x, f(x) = |x|$.

Definizione 2.9. *L'insieme dei valori x per i quali il valore y è dato secondo la regola f si chiama campo di definizione o campo di esistenza o dominio.*

Se f è assegnata senza specificare il suo campo di definizione si intende che va considerato come dominio l'insieme D_f di tutti i valori su cui f è definito. Per esempio: se $f(x) = x$ o $f(x) = x^2$ il dominio è $\mathbb{R}$, se $f(x) = \sqrt{x}$ il dominio è $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, se $f(x) = 1/x$ il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Se I è il dominio di f scriveremo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 2.10. Si chiama *codominio* di f l'insieme C_f dei valori assunti da f al variare di $x \in I$: $C_f = \{y = f(x) : x \in I\}$.

Per esempio: se $f(x) = x$ il codominio è $\mathbb{R}$, se $f(x) = x^2$ il codominio è $\mathbb{R}_+$, se $f(x) = \sqrt{x}$ il codominio è $\mathbb{R}_+$, se $f(x) = 1/x$ il codominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se I e C_f sono il dominio e il codominio di f scriveremo $f : I \rightarrow C_f$.

È conveniente rappresentare le funzioni graficamente. Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, che a $x \in [a, b]$ associa $f(x) \in \mathbb{R}$, consideriamo per ogni $x \in [a, b]$ il punto $P = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$. Chiameremo *grafico* di f l'insieme $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$.

3 Funzioni elementari principali

3.1 Funzioni elementari principali

Si chiamano *funzioni elementari principali* le seguenti funzioni:

1. *funzione potenza* x^α , dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è l'esponente;
2. *funzioni trigonometriche*: $\sin x$ (seno), $\cos x$ (coseno), $\tan x$ o $\operatorname{tg} x$ (tangente), $\cotan x$ o $\operatorname{cotg} x$ (cotangente), $\sec x = 1/\cos x$ (secante), $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ (cosecante);
3. *funzione logaritmo*: $\log_a x$, dove a è la base (se $a = 10$ si scrive $\log_{10} x = \log x$; se $a = e$ si scrive $\log_e x = \ln x$);
4. *funzione esponenziale*: a^x , dove $a \in \mathbb{R}$ è la base (particolarmente interessanti sono i casi $a = 10$ e $a = e$).

Osservazione: e è il numero di Nepero che verrà definito più avanti (cfr. pagina 35).

3.2 Domini e grafici delle funzioni potenze

Si consideri la funzione potenza $f(x) = x^\alpha$. Se $\alpha = p/q$, con q dispari, si ha $D_f = \mathbb{R}$. Se $\alpha = p/q$, con q pari, oppure $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrazionale) allora $C_f = \mathbb{R}_+$. Se α è irrazionale x^α si calcola passando attraverso il logaritmo: $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$. Esempi di grafici di potenze sono riportati in Figura 1.

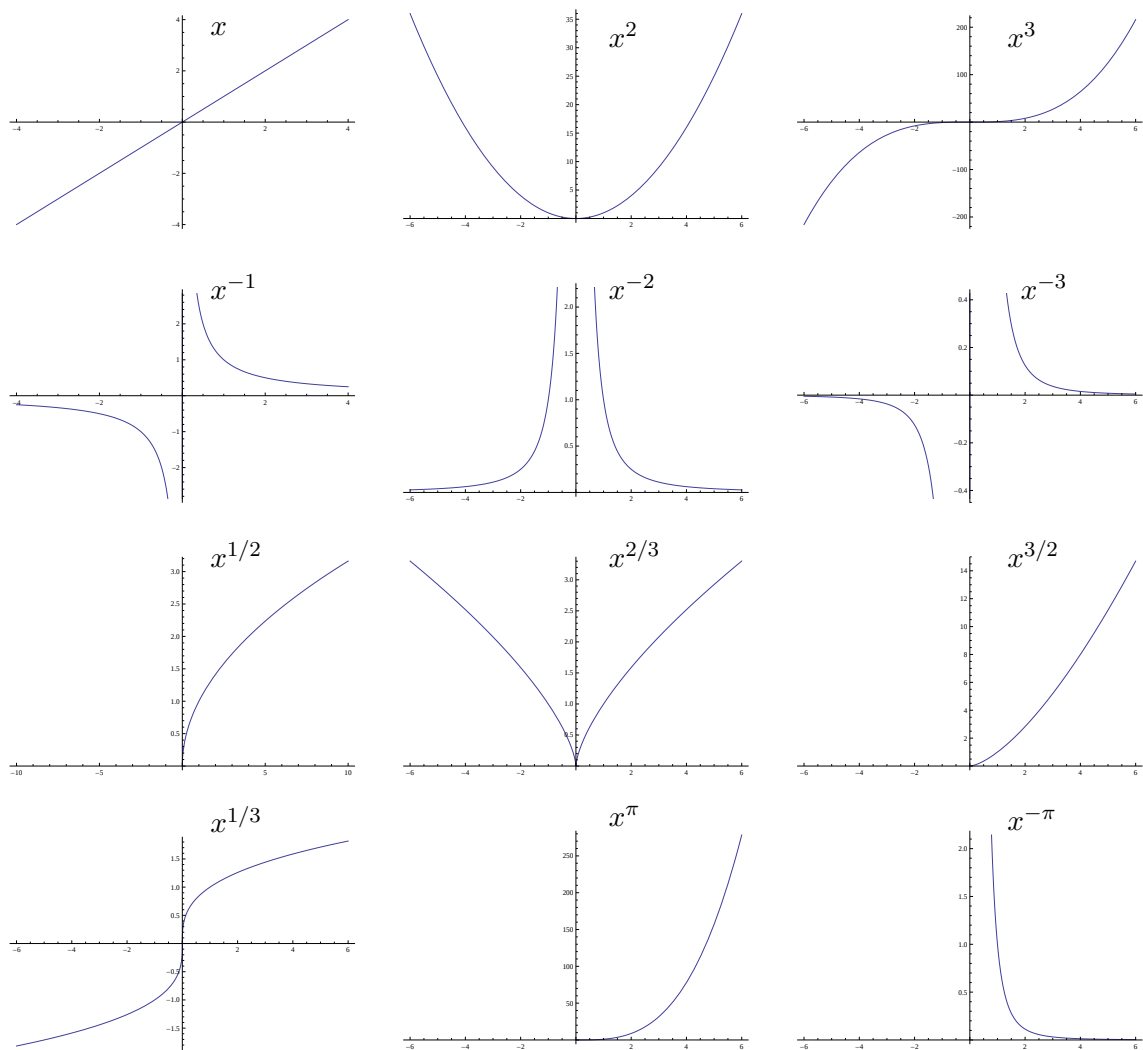


Figura 1: Grafici di alcune potenze.

Osservazioni:

1. Sia $f(x) = x^\alpha$. Per $x \geq 0$ si ha $f(x) \geq 0$ per ogni valore di α . Per $x < 0$, quando la funzione è definita — ovvero per $\alpha = p/q$, con q dispari —, si ha $f(x) > 0$ se p è pari (esempi: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{2/3}$) e $f(x) < 0$ se p è dispari (esempi: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{1/3}$).
2. Se $\alpha = 1/n$ spesso si usa la notazione $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ (in particolare se $n = 2$ si scrive semplicemente $\sqrt{x} = x^{1/2}$). Inoltre si ha $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.3 Equazioni di primo e secondo grado

1. Equazione di primo grado $ax + b = 0$, $a \neq 0$. La soluzione di tale equazione è $x = -b/a$. Graficamente la funzione $f(x) = ax + b$ rappresenta una retta che attraversa l'asse x nel punto $x = -b/a$ e l'asse y nel punto $y = b$; ved. Figura 2. In particolare a è il *coefficiente angolare* della retta: si ha $a = \operatorname{tg} \varphi$, dove φ è l'angolo che la retta forma con l'asse x .

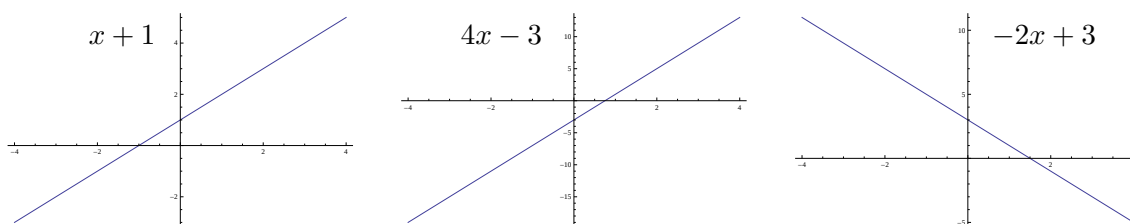


Figura 2: Grafici di alcune rette.

2. Equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Tale equazione ha due soluzioni in $\mathbb{C}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

In particolare, definendo il *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$, se $\Delta > 0$ le due soluzioni sono reali e distinte, se $\Delta = 0$ le due soluzioni sono reali e coincidenti, se $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali. La funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola, con concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$. A seconda del valore del discriminante si hanno i casi rappresentati in Figura 3: le soluzioni dell'equazioni $ax^2 + bx + c = 0$ corrispondono ai punti in cui la parabola interseca l'asse x .

Osservazione: se l'equazione di secondo grado è della forma $ax^2 + 2b_0x + c = 0$ (i.e. il coefficiente del termine di primo grado è divisibile per 2) allora le radici si possono scrivere nella forma:

$$x_1 = \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - ac}}{a}, \quad x_2 = \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - ac}}{a}.$$

3.4 Disequazioni di primo grado

1. Disequazione di primo grado $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$. Sia $x_0 = -b/a$ la soluzione di $ax + b = 0$. Allora la disequazione è soddisfatta per $x \geq x_0$ se $a > 0$ e per $x \leq x_0$ se $a < 0$. Se vale il segno stretto ($ax + b > 0$) allora la soluzione è $x > x_0$ per $a > 0$ e $x < x_0$ per $a < 0$.

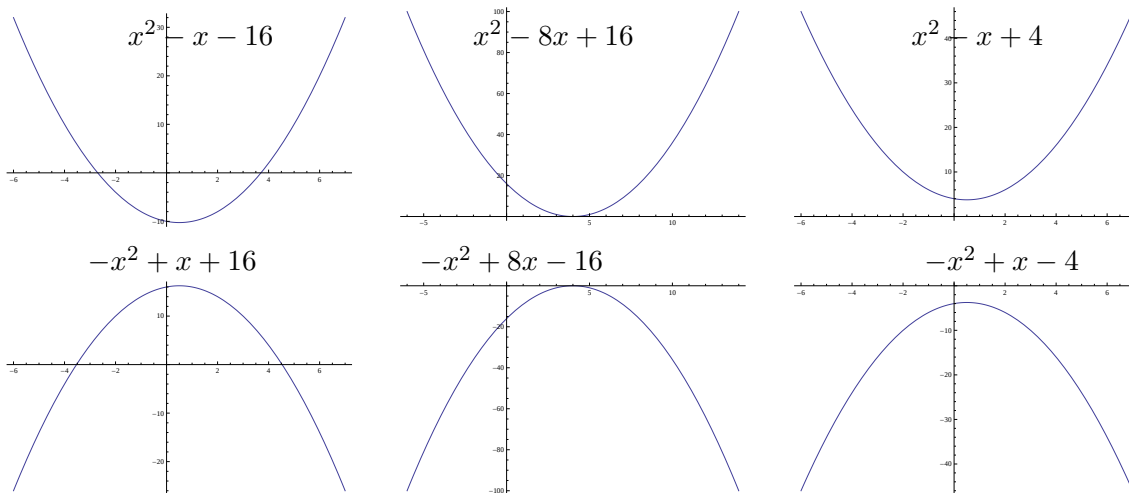


Figura 3: Grafici di alcune parabole.

2. Disequazione di primo grado $ax + b \leq 0$, $a \neq 0$. Ci si riconduce al caso precedente moltiplicando la disequazione membro a membro per -1 : $ax + b \leq 0 \implies -ax - b = (-1)(ax + b) \geq 0$. Quindi la soluzione è $x \geq -(-b)/(-a) = -b/a = x_0$ se $-a > 0$, i.e. $a < 0$, e $x \leq -b/a = x_0$ se $-a < 0$, i.e. $a > 0$. Come prima, se vale il segno stretto nella disequazione ($ax + b < 0$) allora vale il segno stretto anche nella soluzione.

In conclusione abbiamo la situazione seguente:

	$a > 0$	$a < 0$
$ax + b > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$x < -\frac{b}{a}$
$ax + b \geq 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$x \leq -\frac{b}{a}$
$ax + b < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$ax + b \leq 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$x \geq -\frac{b}{a}$

3.5 Disequazioni di secondo grado

1. Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$. È conveniente procedere nel modo seguente. Si disegna la parabola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Si possono avere

vari casi, come mostrato dalla Figura 3. Si ha $ax^2 + bx + c = 0$ per $x = x_1$ oppure per $x = x_2$, se x_1 e x_2 sono reali. Quindi x_1 e x_2 sono i punti dell'asse reale in cui $f(x)$ si annulla. I punti x per cui $f(x) > 0$ sono i valori di x in cui la parabola è al di sopra dell'asse x , mentre i punti x per cui $f(x) < 0$ sono i valori di x in cui la parabola è al di sotto dell'asse x . Occorre distinguere sei possibili casi:

- $a > 0, \Delta > 0 \implies x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$;
- $a > 0, \Delta = 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0, \Delta < 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0, \Delta > 0 \implies x_1 \leq x \leq x_2$;
- $a < 0, \Delta = 0 \implies x = x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0, \Delta < 0 \implies$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2).

2. Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$. Si ragiona come sopra tenendo conto che se nella disequazione vale il segno stretto, allora vale in segno stretto anche nelle soluzioni (con il caveat che se $\Delta = 0$ la disequazione non è più risolta da $x = x_1$). Quindi la soluzione in tal caso diventa:

- $a > 0, \Delta > 0 \implies x < x_1$ oppure $x > x_2$;
- $a > 0, \Delta = 0 \implies x \neq x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0, \Delta < 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0, \Delta > 0 \implies x_1 < x < x_2$;
- $a < 0, \Delta = 0 \implies$ nessuna soluzione (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0, \Delta < 0 \implies$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2).

3. Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a \neq 0$. Si ragiona come nel caso precedente, con l'unica differenza che ora occorre individuare i valori di x in cui la parabola si trova al di sotto dell'asse x . Quindi si ha:

- $a > 0, \Delta > 0 \implies x_1 \leq x \leq x_2$;
- $a > 0, \Delta = 0 \implies x = x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0, \Delta < 0 \implies$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0, \Delta > 0 \implies x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$;
- $a < 0, \Delta = 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0, \Delta < 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2).

4. Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c < 0$, $a \neq 0$. Ragionando come sopra si trova:

- $a > 0, \Delta > 0 \implies x_1 < x < x_2$;
- $a > 0, \Delta = 0 \implies$ nessuna soluzione (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0, \Delta < 0 \implies$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0, \Delta > 0 \implies x < x_1$ oppure $x > x_2$;
- $a < 0, \Delta = 0 \implies x \neq x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0, \Delta < 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2).

Esercizi.

1. Si risolva la disequazione $x^2 + 4x - \frac{9}{4} \geq 0$.
2. Si risolva la disequazione $\frac{2x-3}{5-x^2} \geq 0$.
3. Si risolva la disequazione $|x^2 - 2| < x$.
4. Si risolva la disequazione $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{12-6x}{4-x^2} \geq 0$.
5. Si risolva la disequazione $x+3 \geq \sqrt{x+3}$.
6. Si risolva la disequazione $\frac{x^2-4x+3}{2-x} \leq 0$.
7. Si risolva il sistema di disequazioni $x^2 - 4x + 4 > 0, 2 - x > 0$.
8. Si risolva la disequazione $x^3 - 4x^2 + 2x \geq 0$.

Soluzioni:

1. $a = 1 > 0, \Delta = 25 > 0$. Le radici di $x^2 + 4x - 9/4 = 0$ sono $x_1 = -9/2$ e $x_2 = 1/2$. Quindi la soluzione è: $x \leq -9/2$ oppure $x \geq 1/2$.
2. Deve essere $2x - 3 \geq 0$ e $5 - x^2 > 0$ oppure $2x - 3 \leq 0$ e $5 - x^2 < 0$. Quindi la soluzione è: $\sqrt{5} > x \geq 3/2$ oppure $x < -\sqrt{5}$.
3. Se $x^2 \geq 2$ si ha $x^2 - 2 - x < 0$, che ammette soluzione: $-1 < x < 2$ (poiché $a = 1 > 0, \Delta = 9 > 0$ e le radici sono $x_1 = -1, x_2 = 2$); la condizione $x^2 \geq 2$ richiede $x \geq \sqrt{2}$ oppure $x \leq -\sqrt{2} \implies \sqrt{2} \leq x \leq 2$. Se $x^2 < 2$ si ha $2 - x^2 - x < 0$, che ammette soluzione: $x < -2$ oppure $x > 1$ (poiché $a = -1 < 0, \Delta = 9 > 0$ e le radici sono $x_1 = -2, x_2 = 1$); la condizione $x^2 < 2$ richiede $|x| < \sqrt{2} \implies 1 < x < \sqrt{2}$. Unendo le due condizioni troviamo la soluzione: $1 < x < 2$.

4. Si deve innanzitutto richiedere $x + 2 \neq 0$ e $x^2 \neq 4 \implies x \neq \pm 2$. Inoltre $12 - 6x = 6(2 - x)$ e $4 - x^2 = (2 + x)(2 - x) \implies (12 - 6x)/(4 - x^2) = 6/(2 + x)$. Quindi

$$\frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{12 - 6x}{4 - x^2} = \frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{6}{2 + x} = \frac{2x - 1 - 6}{2 + x} = \frac{2x - 7}{2 + x}.$$

così che si deve richiedere $2x - 7 \geq 0$ e $2 + x > 0$ oppure $2x - 7 \leq 0$ e $2 + x < 0$. La soluzione è quindi: $x < -2$ oppure $x \geq 7/2$.

5. Si deve avere $x + 3 \geq 0 \implies \sqrt{x + 3} \geq 1 \implies x + 3 \geq 1 \implies$ la soluzione è: $x \geq -2$.

6. La soluzione è: $1 \leq x < 2$ oppure $x \geq 3$.

7. La soluzione è: $x < 2$.

8. Si può scrivere $x^3 - 4x^2 + 2x = x(x^2 - 4x + 2)$, quindi si ha $x \geq 0$ e $x^2 - 4x + 2 \geq 0$ oppure $x \leq 0$ e $x^2 - 4x + 2 \leq 0$. L'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$ ha soluzioni $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, quindi $x^2 - 4x + 2 \geq 0$ per $x \leq 2 - \sqrt{2}$ oppure per $x \geq 2 + \sqrt{2}$, mentre $x^2 - 4x + 2 \leq 0$ per $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$. In conclusione si deve avere: $0 \leq x \leq 2 - \sqrt{2}$ oppure $x \geq 2 + \sqrt{2}$.

3.6 Domini e grafici delle funzioni trigonometriche

Consideriamo le funzioni $f(x) = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, \operatorname{csc} x, \operatorname{cosec} x$. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono definite come in Figura 4. Data la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine, si consideri il raggio che forma un angolo x con l'asse delle ascisse: allora $\cos x$ rappresenta la proiezione del raggio sull'asse delle ascisse e $\sin x$ rappresenta la proiezione del raggio sull'asse delle ordinate.

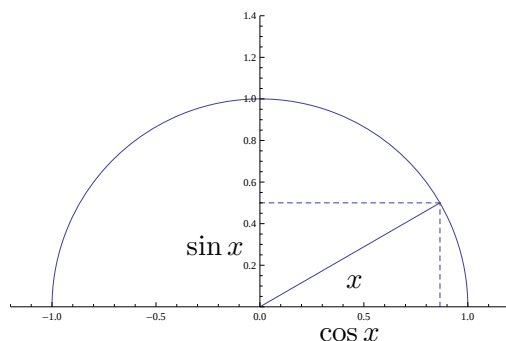


Figura 4: Definizione di $\sin x$ e $\cos x$.

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono quindi definite per $x \in \mathbb{R}$; sono periodiche di periodo 2π , quindi è sufficiente studiarne il grafico per $x \in [-\pi, \pi]$ oppure per $x \in [0, 2\pi]$. La funzione $\operatorname{tg} x$ è definita per $x \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$, ed è periodica di periodo π : quindi è sufficiente

studiarne il grafico per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. La funzione $\cotg x$ è definita per $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ed è periodica di periodo π : quindi è sufficiente studiarne il grafico per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Analogamente si ragiona per le funzioni $\cos x = 1/\cos x$ e $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$. I grafici sono riportati in Figura 5.

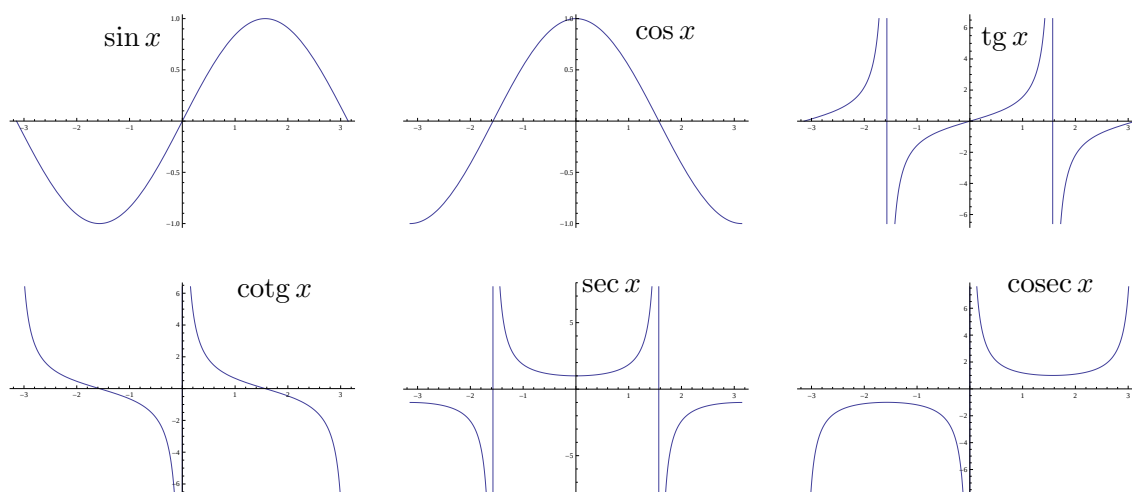


Figura 5: Grafici delle funzioni trigonometriche.

Osservazione: da ricordare sono le *formule di addizione*:

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$;
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

Ricordando tali formule si possono ricavare tutte le altre relazioni trigonometriche, come le relazioni fondamentali:

- $\sin 0 = \sin(x - x) = \sin x \cos x - \sin x \cos x = 0 \implies \sin 0 = 0$,
- $\cos x = \cos(x + 0) = \cos x \cos 0 - \sin x \sin 0 = \cos x \cos 0 \implies \cos 0 = 1$,
- $\cos 0 = \cos(x - x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

o le altre formule di addizione:

- $\operatorname{tg}(x \pm y) = (\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y)/(1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)$,
- $\operatorname{cotg}(x \pm y) = (\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1)/(\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x)$,

o le *formule di prostaferesi*

- $\sin x + \sin y = 2 \sin((x + y)/2) \cos((x - y)/2)$,

- $\cos x + \cos y = 2 \cos((x+y)/2) \cos((x-y)/2)$,
- $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sin(x+y) / \cos x \cos y$,
- $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \sin(x+y) / \sin x \sin y$,

o le *formule di Werner*:

- $\sin x \cos y = (1/2)[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$,
- $\cos x \cos y = (1/2)[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$,
- $\sin x \sin y = (1/2)[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$,

o le *formule di bisezione*:

- $\sin(x/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos x)/2}$,
- $\cos(x/2) = \pm \sqrt{(1 + \cos x)/2}$,
- $\operatorname{tg}(x/2) = \sqrt{(1 - \cos x)/(1 + \cos x)}$.

Inoltre, dal fatto che $\sin(2\pi) = 0$ e $\cos 2\pi = 1$ segue che $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche:
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cos x = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos(2\pi) - \sin(2\pi) \sin x = \cos x$.

È utile ricordarsi i valori delle funzioni trigonometriche in corrispondenza ad alcuni angoli speciali:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{cotg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

I valori che corrispondono ad angoli $x \in (\pi, 2\pi)$ si possono ricavare da quelli elencati sopra utilizzando le formule di addizione: per esempio se $x = 3\pi/2$ si ha $x = \pi + \pi/2$, quindi $\sin x = \sin \pi \cos(\pi/2) + \cos \pi \sin(\pi/2) = -1$, $\cos x = \cos \pi \cos(\pi/2) - \sin \pi \sin(\pi/2) = 0$.

3.7 Dominio e grafico della funzione esponenziale

La funzione a^x , con $a > 0$, $a \neq 1$, è definita per $x \in \mathbb{R}$. Il grafico è rappresentato in Figura 6 per alcuni valori di $a > 1$ e in Figura 7 per alcuni valori di $a < 1$.

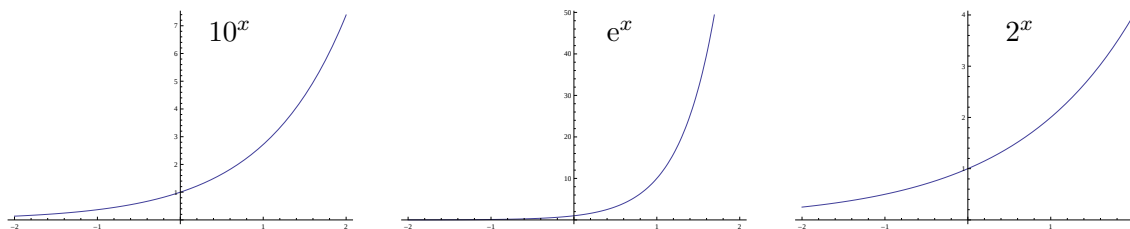


Figura 6: Grafici della funzione esponenziale per alcuni valori di $a > 1$.

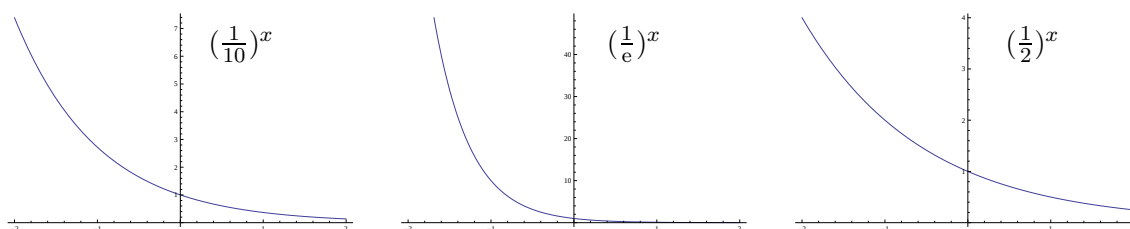


Figura 7: Grafici della funzione esponenziale per alcuni valori di $a < 1$.

Proprietà fondamentali dell'esponenziale:

1. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $a^{x+y} = a^x a^y$ (l'esponenziale della somma è uguale al prodotto degli esponenziali);
2. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $a^{x-y} = a^x / a^y$ (l'esponenziale della differenza è uguale al rapporto degli esponenziali);
3. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. $\forall a > 0$ si ha $a^0 = 1$.
5. $\forall a > 0$ si ha $a^1 = a$.

3.8 Dominio e grafico della funzione logaritmo

La funzione $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, è definita per $x > 0$. Il grafico è rappresentato in Figura 8 per alcuni valori di $a > 1$ e in Figura 9 per alcuni valori di $a < 1$.

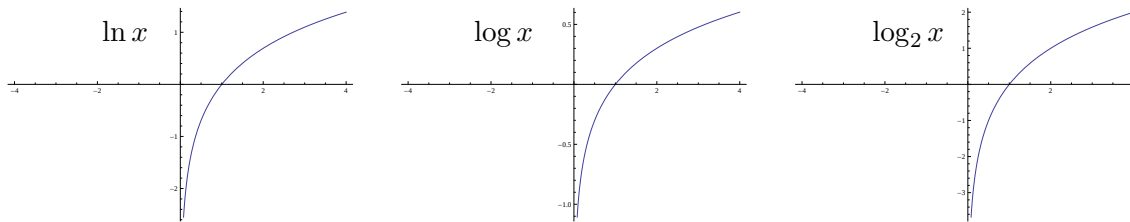


Figura 8: Grafici della funzione logaritmo per alcuni valori di $a > 1$.

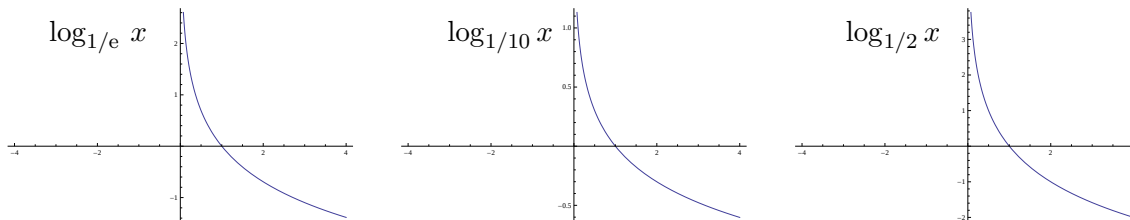


Figura 9: Grafici della funzione logaritmo per alcuni valori di $a < 1$.

Il logaritmo in base a di un numero è definito dalla seguente relazione: $\log_a x = y$ se e solo se $a^y = x$. In particolare $\forall a > 0$ si ha $\log_a a = 1$ (questo si può vedere come segue: $\log_a a = y \implies a^y = a \implies y = 1$).

Proprietà fondamentali del logaritmo:

1. $\forall a > 0, a \neq 1$, e $\forall x, y > 0$ si ha $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi);
2. $\forall a > 0, a \neq 1$, e $\forall x, y > 0$ si ha $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ (il logaritmo del rapporto è uguale alla differenza dei logaritmi);
3. $\forall a > 0, a \neq 1, \forall x > 0$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;
4. $\forall a, b > 0, a, b \neq 1$, e $\forall x > 0$ si ha $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$.
5. $\forall a > 0, a \neq 1$, si ha $\log_a 1 = 0$.

Osservazioni:

1. Dalla proprietà 4, prendendo $x = a$, si ottiene $\log_a b = 1/\log_b a$.
2. Le proprietà del logaritmo si possono derivare dalle proprietà della funzione esponenziale. Per esempio, se poniamo $z = \log_a x$, $w = \log_a y$ e $u = \log_a(xy)$, si ha $a^z = x$, $a^w = y$ e $a^u = xy$, quindi dalla proprietà 1 dell'esponenziale si ottiene $a^u = xy = a^z a^w = a^{z+w} \implies u = z + w \implies \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, i.e. la proprietà 1 del logaritmo.

3.9 Simmetrie e parità

Definizione 3.1. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice pari se $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$, si dice dispari se $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietà:

1. Dalle definizioni segue che se una funzione è pari o dispari, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \geq 0$
2. Il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è pari, il prodotto di una funzione pari con una dispari è dispari.
3. Se una funzione è pari è sufficiente studiarne il grafico per $x \geq 0$: il grafico per $x < 0$ si ottiene allora per riflessione rispetto all'asse y .
4. Se una funzione è dispari è sufficiente studiarne il grafico per $x \geq 0$: il grafico per $x < 0$ si ottiene allora attraverso una doppia riflessione: prima rispetto all'asse y , quindi rispetto all'asse x .

Esempi:

1. La funzione $f(x) = x^2$ è pari.
Dimostrazione: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
2. La funzione $f(x) = \cos x$ è pari.
Dimostrazione: $\cos(-x) = \cos(0-x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = 1 \cdot \cos x + 0 = \cos x$.
3. La funzione $f(x) = x$ è dispari.
Dimostrazione: $f(-x) = -x = -f(x)$.
4. La funzione $f(x) = \sin x$ è dispari.
Dimostrazione: $\sin(-x) = \sin(0-x) = \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = 0 - 1 \cdot \sin x = -\sin x$.

Osservazioni:

1. Noto il grafico di una funzione $f(x)$, il grafico della funzione $g(x) = f(x) + y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ verso l'alto di una quantità y_0 .
2. Noto il grafico di una funzione $f(x)$, il grafico della funzione $g(x) = f(x + x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ verso sinistra di una quantità x_0 .
3. Se $y_0 < 0$ traslare verso l'alto di una quantità y_0 significa di fatto traslare verso il basso di una quantità $|y_0|$. Analogamente se $x_0 < 0$ traslare verso sinistra di una quantità x_0 significa di fatto traslare verso destra di una quantità $|x_0|$.

4. Il grafico della funzione $g(x) = -f(x)$ si può ottenere da quello di $f(x)$ attraverso una riflessione rispetto all'asse x .
5. Il grafico della funzione $g(x) = f(-x)$ si può ottenere da quello di $f(x)$ attraverso una riflessione rispetto all'asse y .

Esempi:

1. Il grafico di $\cos x$ si può ricavare da quello di $\sin x$ tramite una traslazione di $\pi/2$ verso sinistra: infatti $\cos x = \cos((x + \pi/2) - \pi/2) = \cos(x + \pi/2) \cos(\pi/2) + \sin(x + \pi/2) \sin(\pi/2) = 0 + \sin(x + \pi/2) \cdot 1 = \sin(x + \pi/2)$.
2. Il grafico di una qualsiasi parabola $ax^2 + bx + c$ si può ottenere a partire dalla parabola $y = ax^2$ tramite una traslazione di $x_0 = b/2a$ verso sinistra e una traslazione di $y_0 = c - b^2/4a$ verso l'alto.
3. Il grafico della funzione $\cotg x$ si ottiene dal grafico di $\tg x$ tramite una traslazione di $\pi/2$ verso destra e una successiva riflessione rispetto all'asse x : infatti $\cotg x = \cos x / \sin x = -\cos x / \sin(-x) = -\sin(x + \pi/2) / \cos(-x - \pi/2) = -\sin(x + \pi/2) / \cos(x + \pi/2) = -\tg(x + \pi/2)$.
4. Il grafico di a^x , $a < 1$, si ottiene dal grafico di b^x , con $b = 1/a > 1$, attraverso una riflessione rispetto all'asse y : infatti $b^x = a^{-x}$, quindi se $f(x) = b^x$ si ha $f(-x) = b^{-x} = a^x$.
5. Il grafico di $\log_a x$, $a < 1$, si ottiene dal grafico di $\log_b x$, con $b = 1/a > 1$, attraverso una riflessione rispetto all'asse x : infatti si ha $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$, quindi se $b = 1/a$ si trova $\log_a x = \log_a(1/a) \cdot \log_{1/a} x$, dove $\log_a(1/a) = -\log_a a = -1 \implies \log_a x = -\log_{1/a} x \implies$ se $\log_{1/a}(x) = f(x)$ si ha $\log_a x = -f(x)$.

3.10 Esercizi

1. Si risolva la disequazione $8^{x+2} \geq 2^{x^2}$.
2. Si risolva la disequazione $3^x + \frac{1}{3^x} \leq 4$.
3. Si risolva la disequazione $3 \cos^2 x + \sin^2 x - 5 \cos x + 1 \leq 0$ per $x \in [0, 2\pi]$.
4. Si risolva la disequazione $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < \sqrt{x} + 1$.
5. Si risolva la disequazione $|x - 1| < 2|x|$.
6. Si risolva la disequazione $|x^2 - 1| < x + |x + 1|$.

Soluzioni:

1. Si ha $8^{x+2} = 2^{3(x+2)} \implies 2^{3(x+2)} \geq 2^{x^2} \implies 3(x+2) \geq x^2 \implies x^2 - 3x - 6 \leq 0 \implies$ la soluzione è: $(3 - \sqrt{33})/2 \leq x \leq (3 + \sqrt{33})/2$, dove $x = (3 \pm \sqrt{33})/2$ sono le soluzioni di $x^2 - 3x - 6 = 0$.
2. Ponendo $y = 3^x$ si trova $y + 1/y \leq 4 \implies y^2 - 4y + 1 \leq 0$ (si è usato che $y > 0$) $\implies 2 - \sqrt{3} \leq y \leq 2 + \sqrt{3}$, dove $y = 2 \pm \sqrt{3}$ sono le soluzioni di $y^2 - 4y + 1 = 0 \implies$ la soluzione è: $\log_3(2 - \sqrt{3}) \leq x \leq \log_3(2 + \sqrt{3})$.
3. Ponendo $\cos x = y$ e utilizzando che $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si trova $2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \implies 1/2 \leq y \leq 2$, dove $y = 1/2$ e $y = 2$ sono le soluzioni di $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Poiché $\cos x \leq 1$ solo i valori $y \in [1/2, 1]$ sono accettabili $\implies \cos x \in [1/2, 1] \implies$ la soluzione è: $0 \leq x \leq \pi/3$ oppure $5\pi/3 \leq x \leq 2\pi$, dove $x = \pi/3$ e $x = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$ sono i valori per cui si ha $\cos x = 1/2$.
4. Si deve avere $x \geq 0$ (perché $\sqrt{x}$ sia definita) e $x \neq 1$ (perché $\sqrt{x} - 1 \neq 0$). Ponendo $\sqrt{x} = y$ si trova $y/(y-1) < y+1$, dove $y \geq 0$. Se $y > 1$ si ottiene $y < (y+1)(y-1) = y^2 - 1 \implies y^2 - y - 1 > 0$, da cui segue $y < (1 - \sqrt{5})/2$ oppure $y > (1 + \sqrt{5})/2 \implies$ se $y > 1$ si ha $y > (1 + \sqrt{5})/2$. Se $0 \leq y < 1$ si ottiene $y > (y+1)(y-1) = y^2 - 1 \implies y^2 - y - 1 < 0$, da cui segue $(1 - \sqrt{5})/2 < y < (1 + \sqrt{5})/2 \implies$ tutti i valori $0 \leq y < 1$ sono accettabili. La soluzione quindi è: $0 \leq x < 1$ oppure $x > \sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}$.
5. La disequazione diventa: $1 - x < -2x$ per $x < 0$, $1 - x < 2x$ per $0 \leq x < 1$ e $x - 1 < 2x$ per $x \geq 1$. La soluzione è: $x < -1$ oppure $x > 1/3$.
6. La disequazione diventa: $x^2 - 1 < -1$ per $x < -1$, $1 - x^2 < 2x + 1$ per $-1 \leq x \leq 1$ e $x^2 - 1 < 2x + 1$ per $x > 1$. La soluzione è: $0 < x < 1 + \sqrt{3}$.

4 Funzioni composte e funzioni inverse

4.1 Proprietà delle funzioni

Definizione 4.1. $f : I \rightarrow J$ si dice *iniettiva* se $\forall x, y \in I, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.

Definizione 4.2. $f : I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ si dice *suriettiva* se $\forall y \in J \exists x \in I : f(x) = y$.

Definizione 4.3. $f : I \rightarrow J$ si dice *biunivoca* se è *suriettiva* e *iniettiva*.

Le proprietà di iniettività e suriettività dipendono non solo dalla funzione, ma anche dal suo dominio e codominio. Esempi:

1. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è suriettiva perché dato $y < 0$ non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$.

2. Se $I = [-1, 1]$ e $J = [-1, 1]$, $f(x) = x$ è iniettiva e suriettiva. Se $I = [-1, 1]$ e $J = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ è suriettiva ma non iniettiva. Se $I = [0, 1]$ e $J = [0, 1]$ entrambe le funzioni $f(x) = x$ e $f(x) = x^2$ sono iniettive e suriettive.
3. Se $I = [-\pi, \pi]$ (oppure $I = [0, 2\pi]$) e $J = [-1, 1]$, la funzione $\sin x$ è suriettiva ma non iniettiva, diventa iniettiva se $I = [-\pi/2, \pi/2]$.
4. Le funzioni $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, viste come funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, sono iniettive e suriettive per n dispari, non sono né iniettive né suriettive per n pari. Se le funzioni sono viste come funzioni da $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}_+$ allora sono iniettive e suriettive per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 4.4. Data $f : I \rightarrow J$, siano $x \in I$ e $y = f(x) \in J$. Diremo che y è l'immagine di x e x è la controimmagine di y .

Osservazione: se $f : I \rightarrow J$ è biunivoca, $\forall y \in J$ la controimmagine di y è unica.

4.2 Composizione di funzioni

Definizione 4.5. Si chiama *composizione di due funzioni* f e g la funzione $f \circ g$ definita da $f \circ g(x) = f(g(x))$ (funzione composta).

Esempi:

1. $F(x) = \sqrt{1-x} = f \circ g(x)$, con $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1-x$;
2. $F(x) = \sin(1+x^2) = f \circ g(x)$, con $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 1+x^2$;
3. $F(x) = e^{-\sin x^2} = f \circ g \circ h(x)$, con $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = \sin x$ e $h(x) = x^2$.

Osservazione: Si può comporre f con g (e quindi definire $f \circ g$) solo se $C_g \subset D_f$, ovvero, se $f : I \rightarrow J$ e $g : I' \rightarrow J'$, con $J' \subset I$. Si noti che $f \circ g \neq g \circ f$. Per esempio, se $f = \sqrt{x}$ e $g = 1-x$, allora $f \circ g(x) = \sqrt{1-x}$, mentre $g \circ f(x) = 1-\sqrt{x}$; inoltre $f \circ g(x)$ è definita se $x \leq 1$ mentre $g \circ f(x)$ è definita se $x \geq 0$.

4.3 Funzione inversa

Definizione 4.6. Sia $f : I \rightarrow J$ biunivoca. Si chiama *funzione inversa di f* la funzione $g : J \rightarrow I$ tale che $f \circ g = g \circ f = \mathbb{1}$, dove $\mathbb{1}$ è la funzione identità ($\mathbb{1}x = x$).

Si pone $g = f^{-1}$. Si noti che $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$: per esempio se $f(x) = x$ la sua inversa è $f^{-1}(x) = x$, il suo inverso (=reciproco) è $1/x$.

Se f è biunivoca, per ogni $x \in I$ esiste $y = f(x) \in J$ e tale y è unico. Quindi a y si associa in modo univoco x tale che $f(x) = y$: tale x è funzione di y e possiamo quindi scrivere $x = g(y)$, con $g = f^{-1}$, così definendo la funzione inversa.

Esempi:

1. $\sqrt{x}$, $x^{1/n}$, $x^{1/\alpha}$ sono le funzioni inverse di x^2 , x^n , x^α , purché $x \geq 0$.
2. La funzione inversa di $\log_a x$ è x^a , purché $x > 0$.
3. Data la funzione $f(x) = 1 + (x+1)^2/4$, $x \geq -1$, la sua inversa si ottiene esprimendo x in funzione di $y = f(x)$. Si trova $(x+1)^2 - 4(y-1) = 0$, che ammette le radici $x = \pm\sqrt{4(y-1)} - 1$, purché $y \geq 1$. La condizione $x \geq -1$ richiede il segno $+$. Se indichiamo di nuovo la variabile con x e la sua immagine con y troviamo $y = \sqrt{4(x-1)} - 1$, $x \geq 1$.

Regola grafica per determinare l'inversa: si scambiano tra loro gli assi, ovvero si riflette il grafico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Si veda la Figura 10, dove sono riportati i grafici della funzione $y = f(x) = 1 + (x+1)^2/4$, $x \geq -1$, e della sua inversa $y = f^{-1}$, $x \geq 1$.

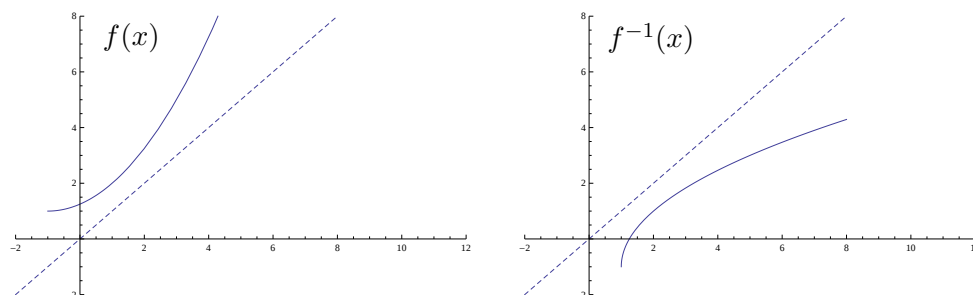


Figura 10: Grafici della funzione $f(x) = 1 + (x+1)^2/4$ e della sua inversa $f^{-1}(x)$

Dalla regola grafica si vedono alcune proprietà interessanti: per esempio, la funzione esponenziale cresce più velocemente di ogni potenza, quindi il logaritmo cresce più lentamente di qualsiasi potenza.

4.4 Funzioni trigonometriche inverse

Consideriamo $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$: corrispondenza biunivoca con $[-1, 1]$. Allora la funzione è invertibile: indichiamo la sua inversa con $x = \arcsin x$ (arcoseno). Analogamente $\cos x$ è invertibile come funzione da $[0, \pi]$ a $[-1, 1]$ e la sua inversa è $x = \arccos x$ (arcocoseno). Simili osservazioni valgono per le funzioni inverse della secante e della cosecante: $\operatorname{arcsec} x$ (arcosecante) e $\operatorname{arccosec} x$ (arcocosecante).

Analogamente $\operatorname{tg} x$ se $I = (-\pi/2, \pi/2)$ e $\operatorname{cotg} x$ se $I = (0, \pi)$ sono iniettive: le loro inverse sono rispettivamente $\arctan x$ o $\operatorname{arctg} x$ (arcotangente) e $\operatorname{arccotan} x$ o $\operatorname{arccotg} x$ (arcocotangente).

Grafici delle funzioni trigonometriche inverse sono riportati in Figura 11.

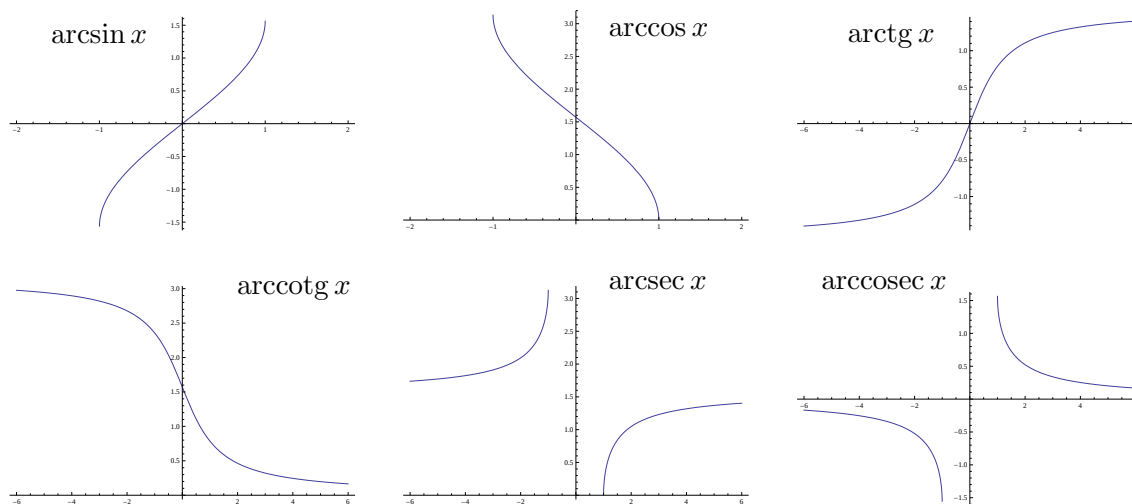


Figura 11: Grafici delle funzioni trigonometriche inverse

4.5 Funzioni elementari

Si chiamano *funzioni elementari* le funzioni che si scrivono come somma, prodotto e composizione di funzioni elementari principali e loro inverse: esempi $f(x) = 1/(x+1)$, $f(x) = \sqrt{1-x}$, $\sin x + \cos x^2$. In particolare sono funzioni principali le seguenti funzioni *funzioni algebriche*: *polinomi*, *funzioni razionali* (rapporti di polinomi), *funzioni irrazionali* (coinvolgono potenze con esponenti irrazionali). Le funzioni non algebriche si dicono *trascendenti* (esempi: funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmi).

4.6 Esercizi

1. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{2 + \sin x}$.
2. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^x}$.
3. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
4. Si determini il dominio della funzione $f(x) = ((x-1)/(x+3))^{1/5}$.
5. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(e^x)}}$.

6. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.
7. Si determini il dominio di $f(x) = \frac{x^{1/3} + 9}{\sqrt{\ln(x^2 - 6x + 5)}}$.
8. Si determini il dominio di $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 6x + 3}$.
9. Si determini il dominio di $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3}$.

Soluzioni:

1. $D_f = \mathbb{R}, C_f = [1, \sqrt{3}]$.
2. $D_f = \mathbb{R}, C_f = \mathbb{R}_+$.
3. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, C_f = \mathbb{R}_+$.
4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
5. $D_f = \left\{x : x \in (-\infty, \ln \pi) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\ln(2k\pi), \ln((2k+1)\pi))\right\}, C_f = [1, \infty)$.
6. $D_f = \left\{x : x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k\pi, k\pi + \pi/2)\right\}, C_f = \mathbb{R}_+$.
7. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 - \sqrt{5} \text{ oppure } x > 3 + \sqrt{5}\}$.
8. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \pm \sqrt{6}\}$.
9. $D_f = \mathbb{R}$.

5 Limiti

5.1 Funzione distanza

Il grafico della funzione modulo è rappresentato in Figura 12.

Definizione 5.1. Se P_1 e P_2 sono due punti dell'asse reale, individuati da $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si definisce distanza tra i due punti P_1 e P_2 la grandezza $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$.

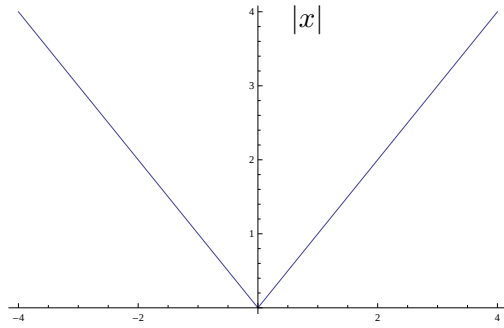


Figura 12: Grafico della funzione modulo

Osservazione: la distanza tra due punti è quindi la lunghezza del segmento che ha come estremi i due punti.

Proprietà:

1. $d(P_1, P_2) \geq 0$ ed è $= 0$ se e solo se $P_1 = P_2$;
2. $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$;
3. $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$.

Osservazione: la dimostrazione segue dalle proprietà del modulo discusse a pag. 8.

Definizione 5.2. Si definisce intorno di centro x_0 e raggio R l'intervallo aperto $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\} = (x_0 - R, x_0 + R)$.

5.2 Limite

Per dire che x è molto vicino a x_0 scriveremo $|x - x_0| < \delta$, con $\delta > 0$ molto piccolo. Per dire che x è molto grande scriveremo $|x| > M$, con $M > 0$ molto grande: se inoltre x è molto grande e positivo specificheremo $x > M$, mentre se è negativo scriveremo $x < -M$, con $M > 0$ molto grande.

Definizione 5.3. Caso di limite finito: scriveremo

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ tale che se $x > M$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ tale che se $x < -M$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Osservazione: Sia δ sia M dipendono da ε .

Definizione 5.4. *Caso di limite infinito: scriveremo*

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall N > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) > N$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall N > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) < -N$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall N > 0 \exists M > 0$ tale che se $x > M$ allora $f(x) > N$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall N > 0 \exists M > 0$ tale che se $x < -M$ allora $f(x) > N$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall N > 0 \exists M > 0$ tale che se $x > M$ allora $f(x) < -N$.
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall N > 0 \exists M > 0$ tale che se $x < -M$ allora $f(x) < -N$.

Osservazione: Sia δ sia M dipendono da N .

5.3 Esempi di limite

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$.
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x + 2} = 1$.
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.
7. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Soluzioni:

1. $|2x - 1 - 3| = 2|x - 2| < 2\delta \implies 2\delta = \varepsilon \implies \delta = \varepsilon/2$.
2. $|1/x - 1| = |(x - 1)/x| \leq \delta/(1 - \delta) \implies \varepsilon = \delta/(1 - \delta) \implies \delta = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$.
3. $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2) \implies |(x - 1)(x + 2)/(x - 1) - 3| = |x + 2 - 3| = |x - 1| < \delta \implies \varepsilon = \delta$.
4. $1/x < 1/M \implies M = 1/\varepsilon$.
5. $|(x - 1)/(x + 2) - 1| = |3/(x + 2)| = 3/(x + 2) \implies x + 2 > 3/\varepsilon \implies M = 3/\varepsilon - 2$.
6. $1/x > -1/M \implies M = 1/\varepsilon$.
7. $1/x^2 > 1/M^2 \implies \varepsilon = 1/M^2 \implies M = 1/\sqrt{\varepsilon}$.
8. se $|x| < \delta$ si ha $1/x^2 > 1/\delta \implies \delta = 1/\sqrt{N} \implies$ fissato $N > 0$, se $\delta = 1/\sqrt{N}$ e $|x| < \delta$, si ottiene $1/x^2 > N$.

La funzione può non essere definita nel punto in cui si fa il limite (esempio 3).

Non è detto che il limite esista sempre. Esempi:

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \implies$ non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.
2. $f(x) = \cos x \implies$ non esiste il limite per $x \rightarrow \infty$.
3. $f(x) = \frac{1}{\cos x} \implies$ non esiste il limite per $x \rightarrow \infty$.
4. $f(x) = \sin \frac{1}{x} \implies$ non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.
5. $f(x) = x^2 \cos x \implies$ non esiste il limite per $x \rightarrow \infty$.

5.4 Limite destro e sinistro

Definizione 5.5. Definiamo il limite destro e limite sinistro:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x - x_0 < \delta$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $0 > x - x_0 > -\delta$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Osservazione: esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$.

5.5 Funzioni limitate

Definizione 5.6. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$: diremo che la funzione f è limitata se esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| < M \forall x \in I$.

Esempi:

1. $f(x) = \cos x$ per $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = 1/x$, $f(x) = x^2$ per $1 \leq x \leq 2$;
3. $f(x) = 1/x$ e $f(x) = x^2$ sono illimitate per $x \in \mathbb{R}$;
4. sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso: la funzione $f(x) = x^2$, $x \in I$, è limitata per ogni I , la funzione $f(x) = 1/x$, $x \in I$, è limitata per ogni I che non contenga lo zero.

5.6 Proprietà dei limiti

Teorema 5.7. $\exists$ finito $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \implies f(x)$ è limitata in un intorno di x_0 .

Dimostrazione. Per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ si ha $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$: quindi nell'intorno di centro x_0 e raggio δ si ha $||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon$, che implica $|f(x)| \leq M = |\ell| + \varepsilon$. ■

Osservazioni:

1. Se il limite è infinito la funzione non può essere limitata. Il viceversa non è vero: se una funzione non è limitata non è detto che tende a $\pm\infty$
2. Se una funzione $f(x)$ è definita in un intorno I ed esiste una costante $c > 0$ tale che $|f(x)| \geq c \forall x \in I$, allora $1/f(x)$ è definita e limitata per ogni $x \in I$.

Teorema 5.8. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$.

Dimostrazione. Per definizione di limite $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta_1$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$ e, analogamente, $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta_2$ si ha $|g(x) - \ell'| < \varepsilon_2$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$ e definiamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$ e $|g(x) - \ell'| < \varepsilon/2 \implies |(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \varepsilon$. ■

Teorema 5.9. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot \ell'$.

Dimostrazione. Per definizione di limite $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta_1$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$ e $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta_2$ si ha $|g(x) - \ell'| < \varepsilon_2$. Inoltre, poiché la funzione f ammette limite, allora f è limitata in un intorno di x_0 (per il Teorema 5.7): quindi esistono $M > 0$ e $\delta_3 > 0$ tale che $|f(x)| < M$ per $|x - x_0| < \delta_3$. Vogliamo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) \cdot g(x) - \ell \cdot \ell'| < \varepsilon$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon/2|\ell'|$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon/2M$ e definiamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Allora per $|x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) \cdot g(x) - \ell \cdot \ell'| \leq |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \ell'| + |f(x) \cdot \ell' - \ell \cdot \ell'| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - \ell'| + |\ell'| \cdot |f(x) - \ell| \leq M \cdot (\varepsilon/2M) + |\ell'| \cdot (\varepsilon/2|\ell'|) = \varepsilon$. ■

Esempi:

1. se k è costante $\lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

2. $\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 = 3$;

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x + 3x^2 + 6x^3) = 1$;

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2} = 1$.

Teorema 5.10. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \neq 0$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Dimostrazione. Segue dal teorema precedente, notando che se $\ell' \neq 0$ allora esiste un intorno di x_0 in cui $1/g(x)$ è limitata e $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/g(x) = 1/\ell'$. L'ultima affermazione si dimostra notando che $|1/g(x) - 1/\ell'| = |(g(x) - \ell')/g(x)\ell'|$: allora $\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0$ tale che $|g(x) - \ell'| < \varepsilon'$ e quindi per tali x si ha $|1/g(x) - 1/\ell'| \leq \varepsilon'/\ell'(\ell' - \varepsilon')$. In particolare fissato $\varepsilon > 0$ si può scegliere δ' tale che $|g(x) - \ell'| < \varepsilon'$, con $\varepsilon' = \varepsilon(\ell')^2/(1 + \varepsilon\ell')$, e quindi $|1/g(x) - 1/\ell'| < \varepsilon$. ■

Teorema 5.11. Siano $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tre funzioni definite in I , tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in I$. Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Dimostrazione. Per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ e $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ per $|x - x_0| < \delta$. Poiché $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ si ha allora $-\varepsilon < f(x) - \ell \leq g(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \varepsilon$, quindi $|g(x) - \ell| < \varepsilon$. ■

Teorema 5.12. $f(x) \geq 0$ per $x \in I$ e $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \implies \ell \geq 0$.

Dimostrazione. Si ragiona per assurdo: supponiamo $\ell < 0$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) - \ell < \varepsilon$. Scelto $\varepsilon = -\ell/2$ si trova $f(x) < \ell + \varepsilon = \ell/2 < 0$, giungendo così a una contraddizione. ■

Teorema 5.13. $f(x) \geq g(x)$ per $x \in I$ e $\exists \ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\ell' = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \implies \ell \geq \ell'$.

Dimostrazione. Si definisce $h(x) = f(x) - g(x)$ e si applica il Teorema 5.12. ■

Osservazioni:

1. Il Teorema 5.11 è noto come *teorema del confronto* o *teorema dei carabinieri*.
2. Il Teorema 5.12 può essere visto come un caso particolare del Teorema 5.13, con $g(x) = 0 \forall x \in I$.
3. Si noti che, nell'enunciato dei Teoremi 5.12 e 5.13, anche se vale il segno stretto $f(x) > g(x)$ può valere il segno $=$ per i limiti. Esempio: $f(x) = 1/x^2$ e $g(x) = 0$. Per $x \rightarrow \infty$ entrambe le funzioni tendono allo stesso limite $\ell = \ell' = 0$, mentre $f(x) > g(x) \forall x \neq 0$. Analoghe considerazioni valgono per il Teorema 5.11: se $f(x) < g(x) < h(x)$ e le due funzioni f e h hanno lo stesso limite ℓ allora anche g ha limite ℓ . Esempio: $f(x) = -1/x^2$, $g(x) = 0$, $h(x) = 1/x^2$.

Teorema 5.14. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0 \implies \exists$ un intorno di x_0 in cui $f(x)$ ha il segno di ℓ .

Dimostrazione. Per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per $|x - x_0| \leq \delta$ si ha $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Se si sceglie $\varepsilon = \ell/2$ allora $\exists \delta$ tale che per ogni x tale che $|x - x_0| < \delta$ (ovvero per ogni x nell'intorno di centro x_0 e raggio δ) si ha $\ell/2 < f(x) < 3\ell/2$, e quindi f ha il segno di ℓ . ■

5.7 Alcuni esempi

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3.$$

Soluzioni:

1. Si ha $0 \leq \sin x \leq x$ se $x \in [0, \pi/2]$ e $0 > \sin x > x$ se $x \in [-\pi, 0)$ (cfr. Figura 13) $\implies |\sin x| \leq |x|$. Per $x \geq 0$ il risultato segue dal Teorema 5.11. Per $x < 0$ si può usare il fatto che la funzione è dispari (cfr. pag 20).
2. Si ha $\cos x = \cos((x/2) + (x/2)) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 1 - 2\sin^2(x/2)$, dove $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x/2) = 0$.
3. La funzione $\sin x/x$ è pari, quindi basta studiare il caso $x \geq 0$. Si ha $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ per $0 < x < \pi/2$ (cfr. Figura 13), quindi, dividendo per $\sin x$, si trova $1 < x/\sin x < 1/\cos x \implies \cos x < \sin x/x < 1$. Si applica quindi il Teorema 5.11.
4. $\operatorname{tg} x/x = (\sin x/x) \cdot (1/\cos x)$: si applica quindi il Teorema 5.10.
5. $\sin kx/x = (\sin kx/kx) \cdot (kx/x)$: si applica quindi il Teorema 5.9.
6. $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$: si applica quindi il Teorema 5.9.
7. $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$: si applica quindi il Teorema 5.9.
8. $\sin 3x/\sin x = (\sin 3x/3x) \cdot (3x/x) \cdot (x/\sin x)$: si applica quindi il Teorema 5.9.

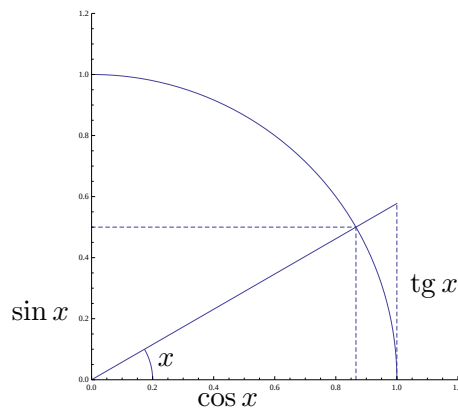


Figura 13: Confronto tra x , $\sin x$ e $\operatorname{tg} x$.

5.8 Un limite notevole: il numero e

Consideriamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x$. Osservazione: si potrebbe pensare $(1 + 1/x) \rightarrow 1$ e $x \rightarrow \infty \implies (1 + 1/x)^x \rightarrow 1^\infty = 1$? Risposta: no!

Consideriamo prima $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Si ha:

- $\exists c_2 > c_1 > 0$ tali che $c_1 \leq (1 + 1/n)^n \leq c_2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: per la formula del binomio si ha

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

quindi $0 < 1 - k/n \leq 1 \forall k = 1, \dots, n-1$, quindi $c_1 = 2$; inoltre

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3 = c_2 \end{aligned}$$

- Se passiamo da n a $n+1$ i fattori nello sviluppo del binomio diventano più piccoli e abbiamo un addendo in più. Quindi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

- Poiché la quantità $(1 + 1/n)^n$ aumenta se si passa da n a $n+1$ ed è limitata superiormente, allora esiste il limite

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Questo si può vedere come segue. Poniamo $a_n = (1 + 1/n)^n$. Dal Teorema 2.7 si ha che esiste $\ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione di estremo superiore $a_n \leq \ell$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, comunque sia fissato $\varepsilon > 0$, esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $a_M > \ell - \varepsilon$. Poiché i numeri a_n crescono al crescere di n , si ha $a_n > \ell - \varepsilon \forall n \geq M$. In conclusione $\forall n > M$ si ha $\ell - \varepsilon < a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$, i.e. $|a_n - \ell| < \varepsilon$, quindi esiste il limite $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Poiché $c_1 \leq a_n \leq c_2 \forall n \in \mathbb{N}$ si ha $c_1 \leq \ell \leq c_2$, per il Teorema 5.13.

Il numero $e = 2.718281824\dots$ è un numero irrazionale (chiamato *numero di Nepero* o *numero di Eulero*).

Consideriamo ora $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq x < n+1$. Se $x \rightarrow +\infty$ si ha anche $n \rightarrow +\infty$. Inoltre

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

dove

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e. \end{aligned}$$

Pertanto si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$.

Osservazione: Si ha anche

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 1/x)^x = e$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Dimostrazione. Si opera il cambio di variabili $x = -(t+1)$ e $x = 1/t$, rispettivamente.

5.9 Esercizi

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-3)^3}$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3}$.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2}{2x^2 + 5x + 1}$.

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}.$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x).$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}.$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$

Soluzioni:

1. Il limite è: $e \cdot 1^3 = e.$
2. Si ha $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$, quindi la funzione diventa $(x - 4)/(x - 3)^2$, dove $x - 4 \rightarrow -1$ e $(x - 3)^2 \rightarrow +\infty$. Quindi il limite è: $-\infty.$
3. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 + x + 1} + x$ la funzione diventa $(x + 1)/(\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = (x(1 + 1/x))/(x(\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1)) = (1 + 1/x)/(\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1)$, dove $1 + 1/x \rightarrow 1$ e $\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1 \rightarrow 2$. Quindi il limite è: $1/2.$
4. Si ha $(x^2 - 2x + 1)/(x + 3) = (x^2(1 - 2/x + 1/x^2))/(x(1 + 3/x)) = x(1 - 2/x + 1/x^2)/(1 + 3/x)$, dove $x(1 - 2/x + 1/x^2) \rightarrow +\infty$ e $(1 + 3/x) \rightarrow 0$. Quindi il limite è: $+\infty.$
5. Il limite è: $0.$
6. Il limite è: $3/2.$
7. Si applica la definizione di limite: se $x > M$ si ha $|\sin x/x| \leq 1/|x| < 1/M = \varepsilon$ se $M = 1/\varepsilon$. Quindi il limite è: $0.$
8. Il limite è: $0.$
9. Si definisce $t = 1/x$, così che $t \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Quindi il limite è: $1.$
10. Il limite è: $+\infty$ se $x \rightarrow 0^+$ e $-\infty$ se $x \rightarrow 0^-.$
11. Il limite non esiste.
12. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ la funzione diventa $2x/(x\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2/(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$, dove $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \rightarrow 2$. Quindi il limite è: $1.$

6 Funzioni continue

6.1 Definizione ed esempi

Osservazione: ogni limite in cui x tende a un valore finito x_0 si può ricondurre a un limite in cui la variabile tende a 0. Infatti se $x \rightarrow x_0$ allora si può porre $x = x_0 + \Delta x$, con $\Delta x \rightarrow 0$. Quindi, se vogliamo studiare il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, possiamo scrivere tale limite come $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x)$.

Esempi:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} 1/x = \lim_{t \rightarrow 0} 1/(t+1)$;
2. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \sin x = \lim_{t \rightarrow 0} \sin(\pi/4 + t) = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin(\pi/4) \cos t + \cos(\pi/4) \sin t) \implies \lim_{x \rightarrow \pi/4} \sin x = \sin(\pi/4) \cdot 1 + \cos(\pi/4) \cdot 0 = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Definizione 6.1. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. La funzione si dice continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

La funzione si dice continua in I se è continua in ogni $x \in I$.

Esempi:

1. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, sono continue in $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = 1/x$, $f(x) = 1/x^n$ sono continue in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
3. $\sqrt{x}$ è continua in $\mathbb{R}_+$;
4. $f(x) = \log_a x$ è continua in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Osservazioni:

1. Usando le formule di addizione si verifica immediatamente che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue. Infatti $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin x_0 \cdot \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \sin \Delta x) = \sin x_0 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \Delta x = \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0$. Analogamente $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\cos x_0 \cdot \cos \Delta x - \sin x_0 \cdot \sin \Delta x) = \cos x_0 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \Delta x - \sin x_0 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \Delta x = \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0$.

2. Un'altra funzione di cui si verifica immediatamente la continuità è x^n , con $n \in \mathbb{N}$. Infatti, scrivendo $x = x_0 + \Delta x$, si ha

$$x^n = (x_0 + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^k (\Delta x)^{n-k},$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_0 + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-k} = \binom{n}{n} x_0^n = x_0^n,$$

perché tutti i termini della somma tendono a zero tranne quello con $k = n$.

Calcolo di limiti usando la continuità:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\sin x^2)$.

Soluzioni.

1. Il limite è: e^3 .
2. Il limite è: $e^{1/3}$.
3. Il limite è: e^4 .
4. Il limite è: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.
5. Poniamo $y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1+y \Rightarrow x = \ln(1+y) \Rightarrow (e^x - 1)/x = y/\ln(1+y) = 1/((1/y)\ln(1+y))$. Inoltre $y \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} (1/y)\ln(1+y) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$.
6. Il limite è: 0.

6.2 Proprietà delle funzioni continue

1. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in I \implies f + g$ è continua in x_0 .
2. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in I \implies f \cdot g$ è continua in x_0 .
3. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0 \implies f/g$ è continua in x_0 .
4. $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \rightarrow J$ sono continue in $g(x_0) \in J$ e in $x_0 \in I$, rispettivamente $\implies f \circ g$ è continua in x_0 .

Osservazioni:

1. Per la proprietà 1 ogni polinomio in x è continuo su tutto l'asse reale.
2. Per la proprietà 3 la funzione $\operatorname{tg} x$ è continua in ogni x_0 in cui $\cos x_0 \neq 0$. Analogamente la funzione $\operatorname{cotg} x$ è continua in ogni x_0 in cui $\sin x_0 \neq 0$.

6.3 Funzioni discontinue

Definizione 6.2. Una funzione f si dice discontinua in x_0 se non è continua in x_0 , i.e. se si verifica una delle seguenti condizioni:

1. la funzione f non è definita in x_0 ;
2. il limite per $x \rightarrow x_0$ di $f(x)$ non esiste o è infinito;
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, ma $\ell \neq f(x_0)$.
4. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_+$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_-$, ma $\ell_+ \neq \ell_-$.

Esempi:

1. la funzione $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x - 1)$ studiata nell'esempio 3 a pag. 28 di §5.3 non è definita in $x = 1$ e il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 1$ esiste e vale 3;
2. la funzione considerata nell'esempio 1 di §5.3 a pag. 29 non è definita in $x = 0$ e il limite destro e sinistro di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ valgono 1 e -1 , rispettivamente;
3. $f(x) = 1/x$ non è definita in $x = 0$ e il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ non esiste: esistono il limite destro $(+\infty)$ e il limite sinistro $(-\infty)$ e sono diversi;
4. $f(x) = 1/x^2$ non è definita in $x = 0$ e il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$ vale infinito;
5. $f(x) = 3^{1/x}$ è discontinua in $x = 0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$;

6. $f(x) = x/|x|$ è discontinua in $x = 0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$;
7. $f(x) = \cos(1/x)$ è discontinua in $x = 0$ perché non esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
8. $f(x) = x^2$ per $x < 1$, $f(x) = 0$ per $x = 1$, $f(x) = x$ per $x > 1$ è discontinua in $x = 1$: diventa continua se si pone $f(1) = 1$.

Osservazione: a volte una discontinuità è *eliminabile*. Per esempio nei casi 1 e 8 la discontinuità è eliminabile ponendo $f(1) = 3$ nel primo caso e $f(1) = 1$ nel secondo. La discontinuità non è mai eliminabile se il limite destro e il limite sinistro sono diversi.

Definizione 6.3. Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie per f se il limite destro e il limite sinistro sono diversi. Ogni punto di discontinuità non eliminabile che non sia di prima specie si dice punto di discontinuità di seconda specie o punto di discontinuità essenziale.

6.4 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 6.4. Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Allora $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \geq f(x)$ e $f(x_2) \leq f(x) \forall x \in [a, b]$.

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Weierstrass*. La sua dimostrazione è non banale.
2. Il punto x_1 si chiama *punto di massimo assoluto* e il valore $M := f(x_1)$ si dice *massimo assoluto* della funzione f . Il punto x_2 si chiama *punto di minimo assoluto* e il valore $m := f(x_2)$ si dice *minimo assoluto* della funzione f .
3. È fondamentale che l'intervallo sia chiuso: $f(x) = x$ e $f(x) = 1/x$, per $x \in (0, 1)$ non hanno né massimo né minimo assoluto.
4. Il massimo di una funzione è unico, ma il punto di massimo di una funzione non è necessariamente unico (esempio: $\sin x$ ha infiniti punti di massimo sulla retta). Analoghe considerazioni valgono per il minimo.

Teorema 6.5. Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e siano M e m il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluto, rispettivamente. Allora $\forall c \in [m, M] \exists \bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = c$.

Teorema 6.6. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I \implies \exists$ un intorno di x_0 in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$.

Dimostrazione. Sia $\ell = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Si applica allora il Teorema 5.14. ■

Osservazione: il teorema è noto come *teorema della permanenza del segno*.

Teorema 6.7. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$ e $f(x_0) > L \implies \exists$ un intorno di x_0 in cui $f(x)$ rimane maggiore di L .

Dimostrazione. Se si definisce $g(x) = f(x) - L$ si ha $g(x_0) = 0$: si può allora applicare il Teorema 6.6 e concludere che in un intorno di x_0 si ha $g(x) = f(x) - L > 0$. ■

Osservazione: il teorema è una generalizzazione del Teorema 6.6, a cui si riduce per $L = 0$.

Teorema 6.8. Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione. Sotto le ipotesi del teorema si ha $f(a) < 0 < f(b)$. Inoltre, per definizione di massimo e di minimo, si ha $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$: in particolare $m \leq f(a)$ e $f(b) \leq M$. Quindi si ottiene $m \leq f(a) < 0 < f(b) \leq M$. Poiché dunque $0 \in [m, M]$ si può applicare il Teorema 6.5 e concludere che esiste $\bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. ■

Osservazione: il teorema è noto come *teorema degli zeri di una funzione continua*.

Teorema 6.9. Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione. Si ragiona come per il Teorema 6.8. ■

Teorema 6.10. Se f è continua e invertibile allora la sua inversa f^{-1} è continua.

6.5 Esercizi

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{3x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x}}{x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\log(1+x)}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, con $a > 0$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x}.$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} \right)^x.$
8. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sin x)^2}{(x - \pi/2)^3 \cos x}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, \text{ con } n \in \mathbb{N}.$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\operatorname{arctg} x).$

Soluzioni:

1. Si scrive $(1 - \cos(e^x - 1))/3x = [(1 - \cos(e^x - 1))/(e^x - 1)^2] \cdot [(e^x - 1)^2/x^2] \cdot (x^2/3x) \rightarrow (1/2) \cdot 1 \cdot 0$ (si è tenuto conto del limite 7 di pagina 32 e del limite 5 di pagina 38). Quindi il limite è: 0.
2. Si scrive $\ln \sqrt{1+x} = (1/2) \ln(1+x)$ e si tiene conto del limite 4 di pagina 38. Quindi il limite è: $1/2$.
3. Il limite è: $1/3$.
4. Il limite è: 0.
5. Il limite è: $\ln a$.
6. Il limite è: $\ln 2$.
7. Il limite è: 1.
8. Il limite è: $-1/4$.
9. Si scrive $x^n = (1+t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k$, dove $t \rightarrow 0$. Quindi il limite è: n .
10. Si usa il fatto che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ e la continuità di $\sin x$. Quindi il limite è: 1.

6.6 Infinitesimi

Definizione 6.11. Si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Analogamente si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$ (risp. $x \rightarrow -\infty$) se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (risp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$).

Nel seguito consideriamo infinitesimi e indichiamo i limiti con $\lim$, intendendo che $\lim = \lim_{x \rightarrow x_0}$ se le funzioni sono infinitesimi per $x \rightarrow x_0$, per qualche x_0 finito, o $\lim = \lim_{x \rightarrow +\infty}$ (risp. $\lim = \lim_{x \rightarrow -\infty}$) se le funzioni sono infinitesimi per $x \rightarrow +\infty$ (risp. $x \rightarrow -\infty$).

Definizione 6.12. Due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ si dicono infinitesimi dello stesso ordine se $\lim f(x)/g(x) = \ell$, con ℓ finito.

Definizione 6.13. Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$, ovvero che $g(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $f(x)$, se $\lim f(x)/g(x) = 0$ (e, di conseguenza, $\lim g(x)/f(x) = \infty$).

Definizione 6.14. Un infinitesimo $f(x)$ si dice infinitesimo di ordine k rispetto all'infinitesimo $g(x)$ se $f(x)$ e $(g(x))^k$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

Esempi:

1. Le funzioni x , $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$
2. La funzione $f(x) = e^x - 1$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a x per $x \rightarrow 0$.
3. La funzione $f(x) = \cos x - 1$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto a x per $x \rightarrow 0$.
4. La funzione $f(x) = \log(1 + x)$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a x per $x \rightarrow 0$.
5. La funzione $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è un infinitesimo di ordine n rispetto a x per $x \rightarrow 0$.
6. La funzione a^{-x} è un infinitesimo di ordine superiore a $x^{-\alpha}$ per $x \rightarrow +\infty$, per ogni $a > 1$ e per ogni $\alpha > 0$.
7. La funzione $1/\log_a x$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $x^{-\alpha}$ per $x \rightarrow +\infty$, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, e per ogni $\alpha > 0$.
8. Se $1 > a > b > 0$ la funzione a^x è un infinitesimo di ordine inferiore a b^x per $x \rightarrow +\infty$.

7 Funzioni derivabili

7.1 Definizione

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Definiamo $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e consideriamo il *rapporto incrementale*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definizione 7.1. La funzione f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Se questo succede il limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$. Diremo che f è derivabile in I se è derivabile in ogni $x \in I$.

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in I , si può definire la *funzione derivata* $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$.
Calcolo di alcune derivate:

1. $f(x) = c$ (costante) $\implies f'(x) = 0$.
2. $f(x) = x$ $\implies f'(x) = 1$.
3. $f(x) = x^2$ $\implies f'(x) = 2x$.
4. $f(x) = x^3$ $\implies f'(x) = 3x^2$.
5. $f(x) = x^n$ $\implies f'(x) = n x^{n-1}$.
6. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\implies f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\implies f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.
8. $f(x) = \frac{1}{x^n}$ $\implies f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
9. $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\implies f'(x) = k x^{k-1}$.
10. $f(x) = \sin x$ $\implies f'(x) = \cos x$.
11. $f(x) = \cos x$ $\implies f'(x) = -\sin x$.
12. $f(x) = e^x$ $\implies f'(x) = e^x$.

13. $f(x) = \ln x \implies f'(x) = 1/x$.

Dimostrazione.

1. $\Delta f = 0$.
2. $\Delta f = \Delta x$.
3. $\Delta f = \Delta x (2x + \Delta x)$.
4. $\Delta f = \Delta x (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$.
5. Per la formula del binomio si ha $\Delta f = \Delta x (nx^{n-1} + \gamma(\Delta x))$, dove $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma(\Delta x) = 0$.
6. $\Delta f = -\Delta x / (x(x + \Delta x))$.
7. $\Delta f = -\Delta x (2x + \Delta x) / (x^2(x + \Delta x)^2)$.
8. $\Delta f = -((x + \Delta x)^n - x^n) / (x^n(x + \Delta x)^n) = -nx^{n-1}\Delta x(1 + \alpha(\Delta x)) / x^{2n}(1 + \beta(\Delta x))$,
dove $\alpha(\Delta x), \beta(\Delta x) \rightarrow 0$ per $\Delta x \rightarrow 0$.
9. Unendo le 5 e 8.
10. $\sin(x + \Delta x) - \sin x = \sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x$, dove $(\cos \Delta x - 1)/\Delta x \rightarrow 0$ e $\sin \Delta x/\Delta x \rightarrow 1$ per $\Delta x \rightarrow 0$.
11. $\cos(x + \Delta x) - \cos x = \cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x$, dove $(\cos \Delta x - 1)/\Delta x \rightarrow 0$ e $\sin \Delta x/\Delta x \rightarrow 1$ per $\Delta x \rightarrow 0$.
12. $\Delta f = e^x(e^{\Delta x} - 1)$ e si usa il limite 5 di pagina 38.
13. $\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln(1 + \Delta x/x) \implies \Delta f/\Delta x = (1/x) \ln(1 + \Delta x/x)^{x/\Delta x}$ e si usa il limite 4 di pagina 38.

7.2 Proprietà della derivata

Teorema 7.2. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I \implies f$ continua in $x = x_0$.

Dimostrazione. f derivabile in $x_0 \implies \exists$ il limite $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f / \Delta x$, dove $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Quindi $\Delta f \rightarrow 0$ per $\Delta x \rightarrow 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 \implies \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ e quindi f è continua in x_0 . ■

Interpretazione grafica della derivata: ved. Figura 14. Se $x_0 + \Delta x = x_1$ si ha $(f(x_1) - f(x_0)) / (x_1 - x_0) = \tan \varphi$, dove φ è l'angolo che la retta passante per i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ forma con l'asse x . Per $P_1 \rightarrow P_0$ lungo il grafico, la retta tende alla retta tangente al grafico in P_0 e $\varphi \rightarrow \alpha$, se α è l'angolo che la retta tangente forma con

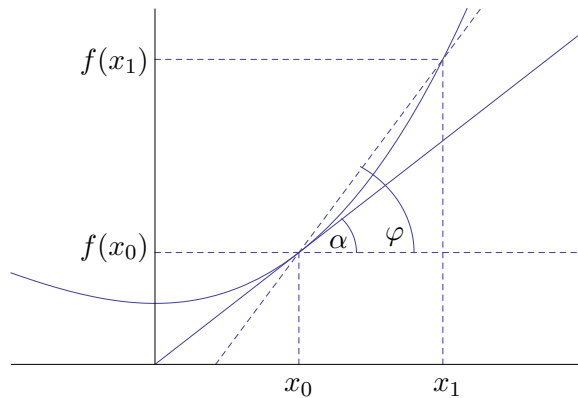


Figura 14: Significato geometrico della derivata.

l'asse x . Quindi $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$: la funzione f è derivabile in x_0 se la curva individuata dal grafico $y = f(x)$ ammette retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Osservazioni:

1. La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile e si ha $f'(x) = 1$ per $x > 0$ e $f'(x) = -1$ per $x < 0$.
2. Se $f(x)$ è una funzione pari, allora $f'(x)$ è dispari. Analogamente se $f(x)$ è dispari, allora la sua derivata $f'(x)$ è pari.
3. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0 ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Infatti tale retta deve avere equazione $y = y(x) = ax + b$, per a e b opportuni (cfr. §3.3). D'altra parte $a = f'(x_0)$ per quanto visto sopra e inoltre $y(x_0) = ax_0 + b = f(x_0)$, da cui si ottiene $b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Quindi risulta $y(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

7.3 Regole di derivazione

1. $g(x) = c f(x)$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante $\implies g'(x) = c f'(x)$.
2. $h(x) = f(x) + g(x) \implies h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $h(x) = f(x) \cdot g(x) \implies h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ e $g(x) \neq 0 \implies h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Dimostrazione:

1. $\Delta g = c\Delta f$;
2. $\Delta h = \Delta f + \Delta g$;
3. $\Delta h = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) = f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x) = f(x+\Delta x)\Delta g + g(x)\Delta f$, dove $f(x+\Delta x) \rightarrow f(x)$ per $\Delta x \rightarrow 0$.
4. $\Delta h = f(x+\Delta x)/g(x+\Delta x) - f(x)/g(x) = (f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x))/g(x)g(x+\Delta x)$, dove $f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) = f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) = (f(x+\Delta x) - f(x))g(x) - f(x)(g(x+\Delta x) - g(x)) = \Delta f g(x) - \Delta g f(x)$, quindi $\Delta h = \Delta f/g(x+\Delta x) - \Delta g f(x)/g(x)g(x+\Delta x)$, dove $g(x+\Delta x) \rightarrow g(x)$ per $\Delta x \rightarrow 0$.

Esempi:

1. $f(x) = x^2 \cos x \implies f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$.
2. $f(x) = x^2 / \sin x \implies f'(x) = (2x \sin x - x^2 \cos x) / \sin^2 x$.
3. $f(x) = \operatorname{tg} x \implies f'(x) = 1 / \cos^2 x$.
4. $f(x) = \operatorname{cotg} x \implies f'(x) = -1 / \sin^2 x$.
5. $f(x) = x \ln x \implies f'(x) = 1 + \ln x$.

Soluzioni:

1. Si usa la regola di derivazione 3.
2. Si usa la regola di derivazione 4.
3. Si usa la regola di derivazione 4 per $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$.
4. Si usa la regola di derivazione 4 per $\operatorname{cotg} x = \cos x / \sin x$.
5. Si usa la regola di derivazione 3.

7.4 Derivata di una funzione composta

Teorema 7.3. Se $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ allora $h'(x) = f'(g(x)) g'(x)$.

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

dove $g(x + \Delta x) = u + \Delta u$, dove $u = g(x)$ e $\Delta u \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Quindi si ottiene

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

dove

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u) = f'(g(x)), \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} &= g'(x), \end{aligned}$$

che completa la dimostrazione. ■

Osservazione: alla luce del Teorema 7.3, la proprietà 4 di §7.3 si può anche dimostrare a partire dalla 3, considerando $f(x)/g(x)$ come prodotto delle due funzioni $f(x)$ e $1/g(x)$ e utilizzando il fatto che la derivata di $1/g(x)$ è $-g'(x)/(g(x))^2$.

Esempi:

1. $f(x) = \sin x^2 \implies f'(x) = 2x \cos x^2$;
2. $f(x) = \ln(1 + x^2) \implies f'(x) = 2x/(1 + x^2)$;
3. $f(x) = e^{x^2} \implies f'(x) = 2xe^{x^2}$;
4. $f(x) = \ln x^2 \implies f'(x) = 2/x$;
5. $f(x) = x^\alpha \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$;
6. $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \ln a$;
7. $f(x) = x^x \implies f'(x) = x^x(1 + \ln x)$.
8. $f(x) = \ln |x| \implies f'(x) = 1/x$.

Soluzioni:

1. Si applica il Teorema 7.3.
2. Si applica il Teorema 7.3.
3. Si applica il Teorema 7.3.
4. Si applica il Teorema 7.3.
5. Si scrive $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ e si applica il Teorema 7.3.
6. Si scrive $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e si applica il Teorema 7.3.
7. Si scrive $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ e si applica il Teorema 7.3.
8. Si utilizza l'osservazione di §7.2 e si applica il Teorema 7.3 (alternativamente si scrive $\ln |x| = \ln x$ per $x > 0$ e $\ln |x| = \ln(-x)$ per $x < 0$).

7.5 Derivata della funzione inversa

Teorema 7.4. *Se $f : I \rightarrow J$ è derivabile e invertibile e $g : J \rightarrow I$ è la sua inversa allora $g'(x) = 1/f'(g(x))$.*

Dimostrazione. Si ha $f(g(x)) = x$, quindi derivando rispetto a x , si ottiene, per il teorema di derivazione della funzione composta, $f'(g(x))g'(x) = 1 \implies g'(x) = 1/f'(g(x))$. ■

Esempi:

1. $f(x) = \arcsin x \implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
2. $f(x) = \arccos x \implies f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
3. $f(x) = \operatorname{arctg} x \implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$
4. $f(x) = \operatorname{arccotg} x \implies f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$

Soluzioni (cfr. Figura 11 per le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$):

1. Si ha $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$, quindi $\cos(\arcsin x) = \sqrt{\cos^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$.
2. Si ha $0 \leq \arccos x \leq \pi$, quindi $\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$.
3. Si ha $\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + x^2.$

4. Si ragiona come nel caso precedente partendo da $1/\sin^2(\operatorname{arctcotg} x)$.

Osservazioni:

1. Poiché $f(x) = e^x$ ha derivata $f'(x) = e^x$, se consideriamo $g(x) = f^{-1}(x) = \ln x$ si ha $g'(x) = 1/f'(\ln x) = 1/e^{\ln x} = 1/x$, consistentemente con la derivata 13 di pag. 45.
2. Viceversa, poiché $f(x) = \ln x$ ha derivata $f'(x) = 1/x$, se consideriamo $g(x) = f^{-1}(x) = e^x$, si ha $g'(x) = 1/f'(e^x) = 1/(1/e^x) = e^x$, consistentemente con la derivata 12 di pag. 44.

7.6 Derivate di ordine qualsiasi

Sia $f(x)$ una funzione derivabile. Se la sua derivata $f'(x)$ è a sua volta derivabile indichiamo con $f''(x)$ la sua derivata, che chiameremo *derivata seconda* di $f(x)$.

Esempi:

1. $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2 \implies f''(x) = 6x$;
2. $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x \implies f''(x) = -\sin x$;
3. $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x \implies f''(x) = e^x$;
4. $f(x) = e^{x^2} \implies f'(x) = 2xe^{x^2} \implies f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$;
5. $f(x) = \ln x \implies f'(x) = 1/x \implies f''(x) = -1/x^2$;

Se $f''(x)$ è a sua volta derivabile possiamo considerare la *derivata terza* di f , che indicheremo con $f'''(x)$, e così via. In generale indicheremo con $f^{(n)}(x)$ la derivata n -esima di $f(x)$, dove $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ e $f^{(3)}(x) = f'''(x)$.

Esempi:

1. $f(x) = x^3 \implies f'''(x) = 6 \implies f^{(4)}(x) = 0$;
2. $f(x) = e^x \implies f^{(n)}(x) = e^x \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \implies f^{(n)}(x) = n!$.

Definizione 7.5. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice di classe C^n in I se è derivabile almeno n volte e la derivata di ordine n è continua.

Osservazioni:

1. Un funzione derivabile infinite volte si dice di classe C^∞ .
2. Dire che una funzione è di classe C^n vuol dire che è derivabile almeno n volte, ma può ammettere anche derivate di ordine più alto: per esempio una funzione di classe C^∞ è anche di classe C^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
3. Valgono le relazioni di inclusione $C^{n+1} \subset C^n \forall n \in \mathbb{N}$.

7.7 Esercizi

1. Si calcoli la derivata di $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.
2. Si calcoli la derivata di $f(x) = \frac{x^2 + x^3}{1 + x^2}$.
3. Si calcoli la derivata di $f(x) = \sin x \cos x$.
4. Si calcoli la derivata di $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.
5. Si calcoli la derivata di $f(x) = \ln \left| \frac{x+2}{3-x} \right|$.
6. Si calcoli la derivata di $f(x) = \cos \ln x$.
7. Si calcoli la derivata di $f(x) = \arcsin \ln x^2$.
8. Si calcoli la derivata di $f(x) = x^{x \ln x}$.
9. Si calcoli la derivata di $f(x) = x^{x^x}$.
10. Si calcoli la derivata di $f(x) = 2^{x^2+3x}$.
11. Si calcoli la derivata di $f(x) = (x + \sqrt{x})^{1/3}$.
12. Si calcoli la derivata di $f(x) = \cos(\cos(\ln x))$.

Soluzioni:

1. Si ha $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
2. Si ha $f'(x) = \frac{x(2 + 3x + x^3)}{(1 + x^2)^2}$.
3. Si ha $f'(x) = \cos 2x$.

4. Si ha $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
5. Si ha $f'(x) = \frac{5}{6+x-x^2}$.
6. Si ha $f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$.
7. Si ha $f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{1-(\ln(x^2))^2}}$.
8. Si ha $f'(x) = x^{x \ln x} \ln x (2 + \ln x)$.
9. Si ha $f'(x) = x^{x^x+x-1} (1 + x \ln x + x(\ln x)^2)$.
10. Si ha $f'(x) = 2^{x^2+3x} (3 + 2x) \ln 2$.
11. Si ha $f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{3(x + \sqrt{x})^{2/3}}$.
12. Si ha $f'(x) = \frac{\sin(\cos(\ln x)) \sin(\ln x)}{x}$.

8 Teoremi sulle funzioni derivabili

8.1 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Teorema 8.1. (1) f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e (2) $f(a) = f(b) = 0 \implies \exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Rolle*.
2. Il significato geometrico del teorema è il seguente: esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui la retta tangente al grafico è parallela all'asse x .
3. Se la derivata non esiste ovunque in (a, b) il risultato non vale: per esempio $f(x) = |x| - 1$, per $x \in [-1, 1]$.

Teorema 8.2. (1) f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) e (2) $f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Si applica il Teorema 8.1 alla funzione $g(x) = f(x) - f(a)$, notando che $g(a) = g(b) = 0$ e $g'(x) = f'(x)$. ■

Teorema 8.3. f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b) \implies \exists c \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Dimostrazione. Definiamo $m = (f(b) - f(a))/(b - a)$ e consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$. Allora $h(b) = h(a) = 0$ e per il Teorema 8.1 esiste $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. D'altra parte $h'(x) = f'(x) - m$, quindi $f'(c) = m$. ■

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Lagrange*.
2. Il significato geometrico del teorema è il seguente: Sia φ l'angolo che il segmento che unisce i punti $P_1 = (a, f(a))$ e $P_2 = (b, f(b))$ forma con l'asse x , così che $\operatorname{tg} \varphi = (f(b) - f(a))/(b - a)$: allora esiste almeno un punto c in cui $f'(c) = \operatorname{tg} \varphi$, ovvero in cui la retta tangente al grafico forma un angolo φ con l'asse x .

Teorema 8.4. (1) f e g sono continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) e (2) $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \implies \exists c \in (a, b)$ tale che $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c)/g'(c)$.

Dimostrazione. Poniamo $m = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$ e consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - f(a) - m(g(x) - g(a))$. Allora $h(b) = h(a) = 0$ e per il Teorema 8.1 esiste $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Poiché $h'(x) = f'(x) - m g'(x)$, si ha $f'(c) = m g'(c)$. ■

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Cauchy*.
2. Si noti che sotto le ipotesi del teorema necessariamente $g(a) \neq g(b)$ (altrimenti per il Teorema 8.1 si avrebbe $g'(c) = 0$ per qualche $c \in (a, b)$, contro l'ipotesi che $g'(x)$ non si annulla mai).
3. Il Teorema 8.3 implica il Teorema 8.2 come caso particolare se $f(b) = f(a)$.
4. Il Teorema 8.4 implica il Teorema 8.3 come caso particolare, prendendo $g(x) = x$.
5. Se si applicasse il Teorema di Lagrange separatamente alle due funzioni f e g , si troverebbe $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c_1)/g'(c_2)$, con due costanti c_1 e c_2 generalmente diverse, quindi non si può dedurre il Teorema 8.4 dal Teorema 8.3.

8.2 Forme indeterminate: teoremi di de l'Hôpital

Definizione 8.5. Siano f e g due funzioni definite in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si dice forma indeterminata il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Teorema 8.6. (1) f e g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , (2) $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, (3) $g(x), g'(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\} \implies$ se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$ allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 8.4 (di Cauchy), per $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

per ξ compreso tra x_0 e x ($\xi \in (x_0, x)$ se $x > x_0$, $\xi \in (x, x_0)$ se $x < x_0$). In particolare $\xi \rightarrow x_0$ per $x \rightarrow x_0$, quindi si trova

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

da cui segue l'asserto. ■

Esempi:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$

Il Teorema 8.6 si può generalizzare nel modo seguente.

Teorema 8.7. (1) f e g continue in $[a, b]$ e derivabili due volte in (a, b) , (2) $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$ e $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, (3) $g(x), g'(x), g''(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\} \implies$ se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x)/g''(x)$ allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f''(x)/g''(x)$.

Dimostrazione. Applicando il Teorema 8.6 alle funzioni f' e g' si trova $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f''(x)/g''(x)$, quindi esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$. Possiamo quindi riapplicare il Teorema 8.6 alle funzioni f e g e si ottiene l'asserto. ■

Esempi:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

Osservazione: se anche le derivate seconde delle funzioni f e g si annullano in x_0 si può passare alle derivate terze, e così via. Vale quindi la seguente ulteriore generalizzazione.

Teorema 8.8. (1) f e g continue in $[a, b]$ e derivabili n volte in (a, b) , (2) $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che le funzioni f e g e tutte le loro derivate fino all'ordine $n - 1$ si annullano in x_0 , (3) $g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\} \implies$ se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$ allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$.

Dimostrazione. Si applica iterativamente il Teorema 8.6 alle funzioni $f^{(n-1)}, \dots, f'', f', f$ e $g^{(n-1)}, \dots, g'', g', g$, rispettivamente. ■

Esempi:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x + x^2}{e^x - x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x + 2x}{e^x - 1 + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + \sin x + 2}{e^x + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Definizione 8.9. Siano f e g due funzioni definite in $I \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$. Si dice forma indeterminata il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Teorema 8.10. (1) f e g sono continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , (2) $g(x), g'(x) \neq 0$ in (a, b) , (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty \implies$ se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)/g'(x)$.

Definizione 8.11. Siano f e g due funzioni definite in un intervallo illimitato $[a, +\infty)$ di $\mathbb{R}$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$. Si dice forma indeterminata il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Definizione 8.12. Siano f e g due funzioni definite in un intervallo illimitato $[a, +\infty)$ di $\mathbb{R}$. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$. Si dice forma indeterminata il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Osservazione: se la funzione $f(x)$ è definita in un intervallo $(-\infty, b]$, si possono dare definizioni analoghe alle Definizioni 8.11 e 8.12, in cui il limite è per $x \rightarrow -\infty$. Se le funzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$ si possono considerare entrambi i limiti $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

Teorema 8.13. (1) f e g sono continue in $[a, +\infty)$ e derivabili in $(a, +\infty)$, (2) $g(x), g'(x) \neq 0$ in $[a, +\infty)$, (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty \implies$ se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x)$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x)$.

Teorema 8.14. (1) f e g sono continue in $(-\infty, b]$ e derivabili in $(-\infty, b)$, (2) $g'(x) \neq 0$ in $(-\infty, b]$, (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty \implies$ se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)/g'(x)$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)/g'(x)$.

Osservazioni:

1. Le dimostrazioni dei Teoremi 8.10, 8.13 e 8.14 sono analoghe a quella del Teorema 8.6 vista sopra.
2. Come il Teorema 8.6 anche i Teoremi 8.10, 8.13 e 8.14 si generalizzano al caso in cui i limiti dei rapporti delle prime n derivate sono forme indeterminate.
3. I teoremi enunciati in questo paragrafo sono noti come *teoremi di de l'Hôpital*.
4. I teoremi di de l'Hôpital permettono di calcolare i limiti di forme indeterminate considerando i limiti dei rapporti delle derivate delle funzioni. Il viceversa non è vero! In altre parole, se esiste il limite di $f(x)/g(x)$, non si può dedurre alcunché sul limite di $f'(x)/g'(x)$. Per esempio se $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = x$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)/x = 1$, d'altra parte $f'(x)/g'(x) = 1 + \cos x$ non ammette limite per $x \rightarrow +\infty$.
5. Sono state considerate sopra forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞ (qui ∞ indica $\pm\infty$). Esistono in linea di principio altre forme indeterminate: $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Tuttavia tali forme sono tutte riconducibili a quelle già viste. Infatti: (1) $0 \cdot \infty = 0/0$ (se $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow \infty$ allora $f(x) \cdot g(x) = f(x)/(1/g(x))$, con $1/g(x) \rightarrow 0$); (2) $0^0 = e^{0 \cdot \ln 0} = e^{0 \cdot \infty}$ (se $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$, con $f(x) > 0$, allora, data $f(x)^{g(x)}$, si considera $\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$); (3) $\infty^0 = e^{0 \cdot \ln \infty} = e^{0 \cdot \infty}$; (4) $1^\infty = e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0}$.

6. Se $f(x) \rightarrow +\infty$ e $g(x) \rightarrow +\infty$ anche $f(x) - g(x)$ è una forma indeterminata. Analogamente se $f(x) \rightarrow -\infty$ e $g(x) \rightarrow -\infty$ anche $f(x) - g(x)$ è una forma indeterminata. Tuttavia, in entrambi i casi, ci si può sempre ricondurre ai casi già trattati (si vedano per esempio gli esercizi 9-11 in §8.3).

8.3 Esercizi

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(1/x^2) \cos(1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(1/x) = \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x, \alpha > 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{\alpha} = 0.$
5. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \ln(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x - 1) \ln(x - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} (t + 2)t \ln t = 0.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{tg}(\pi/2 - x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\pi/2 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos(\pi/2 - x) \sin(\pi/2 - x)}{1} = 0.$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{-2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-2} = -1.$
8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1.$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 1) = +\infty.$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - x^2) \implies$ si ha $(e^{x^2} - x^2) = e^{x^2} (1 - x^2 e^{-x^2})$, dove $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 / e^{x^2} = 0$ (cfr. il limite 2) $\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty.$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = 0.$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(\sin x) \ln x} = 1.$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} e^x = +\infty, \alpha > 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / x^\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / \alpha x^{\alpha-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} = \dots = +\infty$, avendo applicato il Teorema 8.13 finché l'esponente della potenza al denominatore non diventa negativo.
14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(\operatorname{tg} x) \ln(\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{(1/\cos x)(\sin x) \ln(\sin x)} = e^{1 \cdot 0} = 1$.

9 Studio del grafico di una funzione

9.1 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione 9.1. Una funzione f continua in $[a, b]$ si dice *crescente* in $[a, b]$ se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_2 > x_1$, si ha $f(x_2) \geq f(x_1)$. Si dice *decrescente* in $[a, b]$ se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_2 > x_1$, si ha $f(x_2) \leq f(x_1)$. Si dice *strettamente crescente* o *strettamente decrescente* se vale il segno stretto: $f(x_2) > f(x_1)$ o $f(x_2) < f(x_1)$, rispettivamente.

Esempi:

1. x^2 è crescente in $[0, \infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, 0]$;
2. a^x con $a > 1$ (in particolare e^x) è crescente in $\mathbb{R}$;
3. $\log_a x$ con $a > 1$ (in particolare $\ln x$) è crescente in $(0, +\infty)$;
4. $1/x^2$ è decrescente in $(0, \infty)$ e crescente in $(-\infty, 0)$;
5. $1/x$ è decrescente in $(0, \infty)$ e in $(-\infty, 0)$, ovvero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
6. e^{-x} è decrescente in $\mathbb{R}$;
7. $\sin x$ è crescente per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ e decrescente per $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$;
8. $\cos x$ è crescente per $x \in [\pi, 2\pi]$ e decrescente per $x \in [0, \pi]$.

Osservazioni:

1. Se la funzione $f(x)$ è crescente allora $-f(x)$ è decrescente.
2. Se la funzione $f(x)$ è pari ed è crescente per $x > 0$ allora è decrescente per $x < 0$;
 se $f(x)$ è dispari ed è crescente per $x > 0$ allora è crescente anche per $x < 0$.

Teorema 9.2. f continua e derivabile in $[a, b] \implies f$ è crescente in $[a, b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Consideriamo il rapporto incrementale $\Delta f/\Delta x$, $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Se f è crescente allora $\Delta f/\Delta x \geq 0 \forall \Delta x$. Passando al limite, per il Teorema 5.12, si trova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0.$$

Viceversa, fissati $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_2 > x_1$, per il Teorema 8.3, si ha $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, per qualche $\xi \in (x_1, x_2)$: quindi se $f'(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ si trova $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. ■

Teorema 9.3. *f continua e derivabile in $[a, b] \implies f$ è decrescente in $[a, b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. Si ragiona come per il Teorema 9.2. Oppure si definisce $g(x) = -f(x)$ e si applica il Teorema 9.2 alla funzione g . ■

Osservazioni:

1. Se la funzione è crescente, la tangente al grafico forma un angolo $\varphi \in [0, \pi/2)$ con l'asse x , quindi $\text{tg } \varphi \geq 0$. Analogamente se la funzione è negativa, l'angolo è $\varphi \in (-\pi/2, 0]$ e quindi $\text{tg } \varphi \leq 0$.

Esempi:

1. Se $f(x) = x^4$ si ha $f'(x) = 4x^3$, quindi $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$ e decrescente per $x \leq 0$.
2. Se $f(x) = x^5$ si ha $f'(x) = 5x^4 \geq 0$, quindi $f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definizione 9.4. *Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Diremo che x_1 è un punto di massimo relativo se esiste un intorno $B(x_1, \delta_1) = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ tale che $f(x) \leq f(x_1) \forall x \in B(x_1, \delta_1)$. Il valore $f(x_1)$ si dice massimo relativo di f .*

Definizione 9.5. *Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Diremo che x_2 è un punto di minimo relativo se esiste un intorno $B(x_2, \delta_2) = (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ tale che $f(x) \geq f(x_2) \forall x \in B(x_2, \delta_2)$. Il valore $f(x_2)$ si dice minimo relativo di f .*

Esempio: la funzione $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ ha un punto di massimo relativo in $x = 0$, ma non ha massimo assoluto essendo illimitata superiormente; ha invece due punti di minimo relativo in $x = \pm 1$, che sono anche punti di minimo assoluto.

Definizione 9.6. *I massimi e minimi relativi di una funzione f si chiamano punti estremali di f .*

Definizione 9.7. *I punti in cui si annulla la derivata prima di una funzione f derivabile si chiamano punti stazionari di f .*

Teorema 9.8. *f derivabile in $(a, b) \implies$ se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo o minimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$, ovvero se x_0 è un punto estremaie allora è un punto stazionario.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo di f . Allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$ e quindi $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0 \forall |\Delta x| < \delta$. Quindi $\Delta f / \Delta x \leq 0$ se $\Delta x \geq 0$ e $\Delta f / \Delta x \geq 0$ se $\Delta x \leq 0$. Poiché la funzione è derivabile esistono il limite destro e il limite sinistro e sono uguali a $f'(x_0)$. Quindi

$$0 \geq \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0,$$

che implica $f'(x_0) = 0$. Il caso in cui x_0 sia un punto di minimo si discute allo stesso modo. ■

Osservazioni:

1. Il Teorema 9.8 (che è noto come *teorema di Fermat*) dà una condizione necessaria per l'esistenza di un punto estremaie.
2. Il viceversa non è vero: se esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ non necessariamente x_0 è un punto di massimo o di minimo (esempio: se $f(x) = x^3$ allora $f'(x) = 3x^2$, quindi $f'(0) = 0$; tuttavia $x = 0$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo).
3. Se la funzione non è derivabile, i punti di massimo e di minimo relativo vanno cercati in modo diverso. Per esempio se $f(x) = |x|$ si ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$, dove la funzione non è derivabile. La funzione $f(x) = (1 - x^{2/3})^2$ ha un massimo relativo in $x = 0$, mentre $f'(x) = -4(1 - x^{2/3})x^{-1/3}/3$ diverge per $x \rightarrow 0^\pm$ (cfr. Figura 15).
4. In base alle osservazioni precedenti, un punto stazionario non è necessariamente un punto estremaie e un punto estremaie è necessariamente un punto stazionario solo nel caso in cui la funzione sia derivabile.

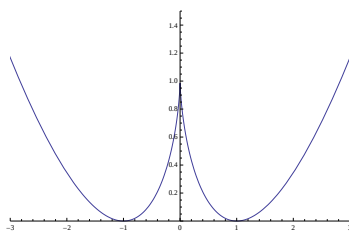


Figura 15: Grafico della funzione $(1 - x^{2/3})^2$.

Teorema 9.9. (1) f continua e derivabile in $[a, b]$, (2) x_1 punto stazionario di f , (3) $\exists \delta > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per $x \in (x_1 - \delta, x_1)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (x_1, x_1 + \delta) \implies x_1$ è un punto di massimo.

Dimostrazione. Sia $x \in (x_1 - \delta, x_1)$. Allora $f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1)$, per un opportuno $\xi_1 \in (x, x_1)$. Quindi $f'(\xi_1) > 0 \implies f(x) < f(x_1)$. Analogamente per $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ si ha $f(x) - f(x_1) = f'(\xi_2)(x - x_1)$, per un opportuno $\xi_2 \in (x_1, x)$. Quindi $f'(\xi_2) < 0 \implies f(x) < f(x_1)$. Conclusione: $\forall x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ si ha $f(x) \leq f(x_1) \implies x_1$ è un punto di massimo. ■

Teorema 9.10. (1) f continua e derivabile in $[a, b]$, (2) x_1 punto stazionario di f , (3) $\exists \delta > 0$ tale che $f'(x) < 0$ per $x \in (x_1 - \delta, x_1)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (x_1, x_1 + \delta) \implies x_1$ è un punto di minimo.

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del Teorema 9.9 ■

Definizione 9.11. (1) f continua e derivabile in $[a, b]$, (2) x_0 punto stazionario di f , (3) $\exists \delta > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oppure $f'(x) < 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e per $x \in (x_0, x_0 + \delta) \implies x_0$ si dice punto di flesso orizzontale.

9.2 Primo schema per lo studio del grafico di una funzione

In base ai risultati ottenuti finora possiamo tracciare un primo schema da seguire per lo studio del grafico di una funzione $f(x)$:

1. Determinare il dominio D_f della funzione.
2. Determinare l'andamento della funzione agli estremi del dominio.
3. Calcolare la derivata prima $f'(x)$.
4. Determinare i punti stazionari, cioè i punti in cui la derivata prima si annulla.
5. Studiare il segno della derivata prima in un intorno di ogni punto stazionario per determinare i punti estremali (massimi e minimi relativi) e i punti di flesso.
6. Calcolare la funzione nei punti stazionari.
7. Determinare – se esistono e se possibile – i punti in cui la funzione $f(x)$ attraversa l'asse x e l'asse y .

Osservazione: a seconda dei valori di $f'(x)$ nell'intorno di un punto stazionario x_0 si ha la seguente tabella:

$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$		
+	0	-	$\Rightarrow$	massimo,
-	0	+	$\Rightarrow$	minimo,
+	0	+	$\Rightarrow$	flesso,
-	0	-	$\Rightarrow$	flesso,

dove + indica $f'(x) > 0$, 0 indica $f'(x) = 0$ e - indica $f'(x) < 0$.

Esempi (cfr. Figura 16):

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 2)$;
2. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

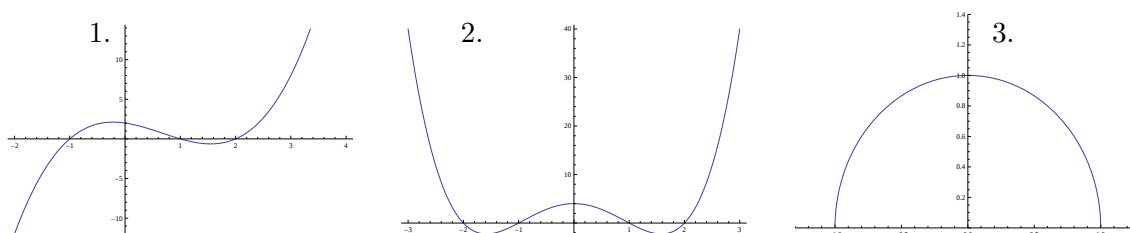


Figura 16: Grafici delle funzioni degli esempi di §9.2.

9.3 Studio della derivata seconda

Teorema 9.12. (1) f di classe C^2 in $[a, b]$ (2) x_0 punto stazionario di f (i.e. $f'(x_0) = 0$) $\Rightarrow$ se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo, se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo.

Dimostrazione. Supponiamo $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$. Poiché $f''(x)$ è continua esiste $\delta > 0$ tale che $f''(x) < 0$ nell'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, per il Teorema 6.6 (teorema della permanenza del segno). Quindi in tale intorno $f'(x)$ è strettamente decrescente. Poiché $f'(x_0) = 0$ si ha quindi $f'(x) > 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Per il Teorema 9.9 possiamo concludere che x_0 è un punto di massimo. Se invece $f''(x_0) > 0$ si ragiona allo stesso modo utilizzando alla fine il Teorema 9.10. ■

Osservazione: se $f''(x_0) = 0$ non possiamo concludere nulla. Per esempio, se si considerano le funzioni $f(x) = x^4$, $f(x) = x^3$ e $f(x) = -x^4$, si ha in tutti e tre i casi $f'(0) = f''(0) = 0$, tuttavia $x = 0$ è un punto di minimo per x^4 , un punto di flesso orizzontale per x^3 e un punto di massimo per $-x^4$, come si può vedere dalla discussione in §9.2.

Esempi (cfr. Figura 17):

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$;
2. $f(x) = \sin x + \cos x$;
3. $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

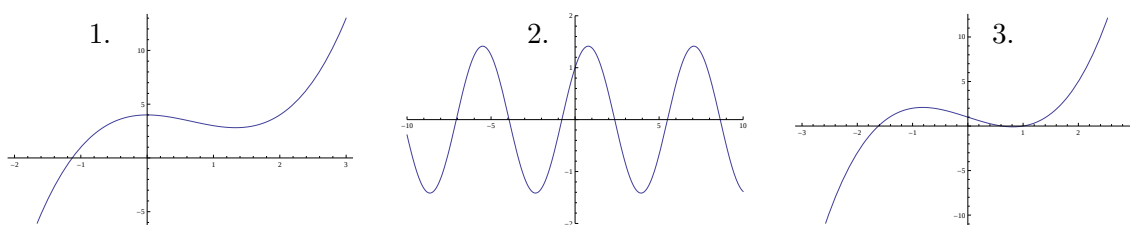


Figura 17: Grafici delle funzioni degli esempi di §9.3.

9.4 Massimi e minimi assoluti di una funzione

Si ricordi il Teorema 6.7: una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo. Dal Teorema 6.7 discende che, nella ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti di una funzione f derivabile in un intervallo limitato $[a, b]$, possiamo procedere come segue:

1. Si cercano i punti stazionari, i.e. i punti x che risolvono l'equazione $f'(x) = 0$: siano $x_1, x_2, x_3, \dots$ tali punti. Si calcolano quindi i valori che la funzione f assume in tali punti, i.e. $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$.
2. Si calcolano i valori $f(a)$ e $f(b)$ che la funzione assume agli estremi dell'intervallo.
3. Il massimo assoluto e il minimo assoluto saranno rispettivamente

$$\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots\} \text{ e } \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots\}.$$

Esempi:

1. $f(x) = x^2 + 2x - 2$, $x \in [-2, 0] \implies$ c'è un solo punto stazionario $x = -1$; si ha $f(-2) = f(0) = -2$, $f(-1) = -3$ (cfr. Figura 18) $\implies \max f(x) = -2$, $\min f(x) = -3$.

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3, x \in [-2, 3] \Rightarrow$ ci sono due punti stazionari $x = 1 \pm 2/\sqrt{3}$; si ha $f(1 - 2/\sqrt{3}) \approx 3.0792, f(1 + 2/\sqrt{3}) \approx -3.0792, f(-2) = -15, f(3) = 0$ (cfr. Figura 18) $\Rightarrow \max f(x) = f(1 - 2/\sqrt{3}), \min f(x) = f(-2)$.

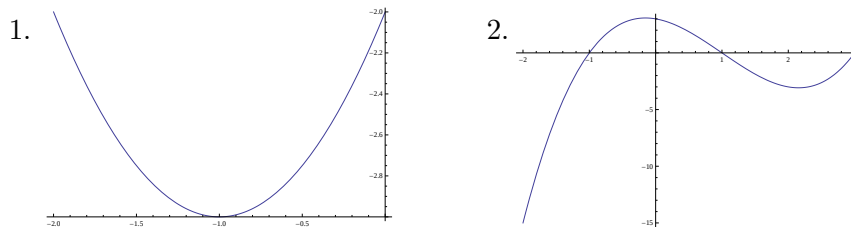


Figura 18: Grafici delle funzioni degli esempi di §9.4.

9.5 Funzioni convesse e funzioni concave

Definizione 9.13. Sia f una funzione derivabile in $[a, b]$. Si dice che f è convessa in $[a, b]$ se tutti punti $(x, f(x))$, al variare di $x \in [a, b]$, si trovano al di sopra di una qualsiasi retta tangente al grafico. Si dice che f è concava in $[a, b]$ se tutti punti $(x, f(x))$ si trovano al di sotto di una qualsiasi retta tangente al grafico.

Teorema 9.14. Sia f derivabile due volte in $[a, b]$. Se $f''(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ allora la funzione f è convessa in $[a, b]$.

Dimostrazione. Si fissi $x_0 \in [a, b]$: l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (cfr. l'Osservazione 3 di pag. 46). La differenza tra il valore $f(x)$ e il punto della retta che corrisponde all'ascissa x è data da $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$. Utilizzando il teorema 8.3 (di Lagrange) si trova quindi

$$\begin{aligned} f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] &= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0), \end{aligned}$$

per un opportuno ξ compreso tra x_0 e x . Riapplicando il teorema di Lagrange si trova

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = f''(\xi_1)(\xi - x_0)(x - x_0)$$

per un opportuno ξ_1 compreso tra x_0 e ξ . Si noti che se $x > x_0$ allora $x_0 < \xi < x$, mentre se $x < x_0$ si ha $x < \xi < x_0$: di conseguenza $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. Quindi, dal momento che $f''(\xi_1) > 0$ per ipotesi, $f(x)$ si trova al di sopra della retta tangente e quindi la funzione f è convessa. ■

Teorema 9.15. Sia f derivabile due volte in $[a, b]$. Se $f''(x) < 0 \forall x \in [a, b]$ allora la funzione f è concava in $[a, b]$.

Dimostrazione. Si ragiona allo stesso modo del Teorema 9.14. ■

Osservazioni:

1. Se f è convessa, allora $-f$ è concava.
2. Una funzione può essere concava e convessa in differenti intervalli. Per esempio la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dell'esempio 2 di §9.4 è convessa in $[1, 3]$ e concava in $[-2, 1]$. Infatti $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ e quindi $f''(x) = 6(x - 1) \implies f''(x) > 0$ per $x > 1$ e $f''(x) < 0$ per $x < 1$.

Esempi:

1. $f(x) = x^2$ e $f(x) = a^x$, $a > 0$ (quindi in particolare e^x), sono convesse in $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$ è convessa in $\mathbb{R}_+$.
3. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha < 1$ è concava in $\mathbb{R}_+$.
4. $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$, è concava in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
5. $f(x) = \log_a x$, con $0 < a < 1$, è convessa in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
6. $f(x) = x^3$ è convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$.

Osservazione: se la concavità di una funzione di classe C^2 cambia, vuol dire che ci sono punti x in cui $f''(x) = 0$.

Definizione 9.16. Sia f una funzione derivabile due volte in $[a, b]$. Se $\exists x_0 \in [a, b]$ tale che $f''(x_0) = 0$ diremo che x_0 è un punto di flesso. Se inoltre $f'(x_0) = 0$ diremo che x_0 è un punto di flesso orizzontale, mentre se $f'(x_0) \neq 0$ diremo che x_0 è un punto di flesso obliquo.

Esempi:

1. $f(x) = x^3$ ha un punto di flesso orizzontale in $x = 0$: infatti $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$.
2. $f(x) = x^3 + x$ ha un punto di flesso obliquo in $x = 0$: si ha infatti $f'(x) = 3x^2 + 1$ e $f''(x) = 6x$; cfr. Figura 19.
3. $f(x) = \sin x$ ha punti di flesso obliquo in tutti i punti in cui si annulla: infatti $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$.
4. Analogamente $f(x) = \cos x$ ha punti di flesso obliquo in tutti i punti in cui si annulla.

5. $f(x) = e^{-x^2}$ ha punti di flesso obliquo in $x = \pm 1/\sqrt{2}$, è convessa per $|x| > 1/\sqrt{2}$ e concava per $|x| < 1/\sqrt{2}$. Infatti $f'(x) = -2x e^{-x^2}$ e $f''(x) = (4x^2 - 2) e^{-x^2}$; cfr. Figura 19.

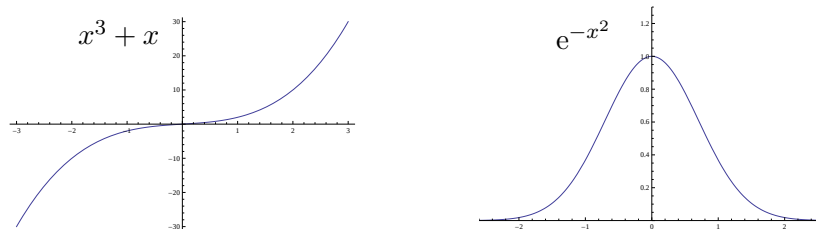


Figura 19: Grafici delle funzioni $f(x) = x^3 + x$ e $f(x) = e^{-x^2}$.

Osservazione: la Definizione 9.16 coincide con la Definizione 9.11 per i punti di flesso orizzontale, come è facile verificare.

9.6 Asintoti

Definizione 9.17. Data una retta r e una funzione f , se la distanza tra un punto P del grafico di f e la retta tende a zero quando P tende all'infinito diremo che r è un asintoto della funzione f . L'asintoto si dice asintoto orizzontale se la retta r ha equazione $y = c$, dove c è costante, si dice asintoto obliquo se la retta r ha equazione $y = ax + b$, dove $a \neq 0$.

Definizione 9.18. Si chiama asintoto verticale di una funzione f una retta r di equazione $x = c$, dove c è una costante, tale che si abbia $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$.

Osservazioni:

1. Nella Definizione 9.18 il limite della funzione può essere $+\infty$ o $-\infty$, a seconda dei casi.
2. Esempi di asintoti orizzontali, obliqui e verticali sono dati in Figura 20: la funzione $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha un asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \rightarrow \pm\infty$, la funzione $(49 + 2(x + 2)^3)/x^2$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = 2x + 12$ (per $x \rightarrow \pm\infty$) e un asintoto verticale di equazione $x = 0$, la funzione $1/(x + 2)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = -2$ e un asintoto orizzontale $y = 0$ (per $x \rightarrow \pm\infty$).

Osservazioni:

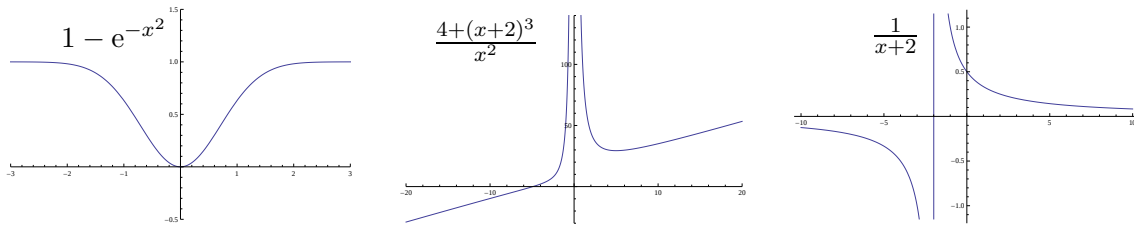


Figura 20: Esempi di asintoti.

1. Se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$, allora possiamo concludere che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale.
2. Se una funzione f ha per $x \rightarrow +\infty$ un asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$ deve succedere che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$. Questo implica che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Analogamente si ragiona se si ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$. Per determinare eventuali asintoti obliqui od orizzontali si procede quindi come segue: (1) si calcola prima il limite di $f(x)/x$ per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$ e si trova così il valore di a se il limite esiste (in particolare se $a = 0$ l'asintoto è orizzontale, se $a \neq 0$ l'asintoto è obliquo), (2) si calcola quindi b .

Esempi:

1. $f(x) = 1/x$ ha un asintoto verticale in $x = 0$;
2. $f(x) = 1/(x + 1)$ ha un asintoto verticale in $x = -1$;
3. $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ ha due asintoti verticali, uno in $x = -1$ e uno in $x = +1$;
4. $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha infiniti asintoti verticali in $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
5. $f(x) = \log_a x$ ha un asintoto verticale in $x = 0$;
6. $f(x) = x^2/(1 + x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$ per $x \rightarrow \pm\infty$;
7. $f(x) = (x^2 + 4)/(x^2 + 1)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \rightarrow \pm\infty$;
8. $f(x) = x + e^x$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$ per $x \rightarrow -\infty$.

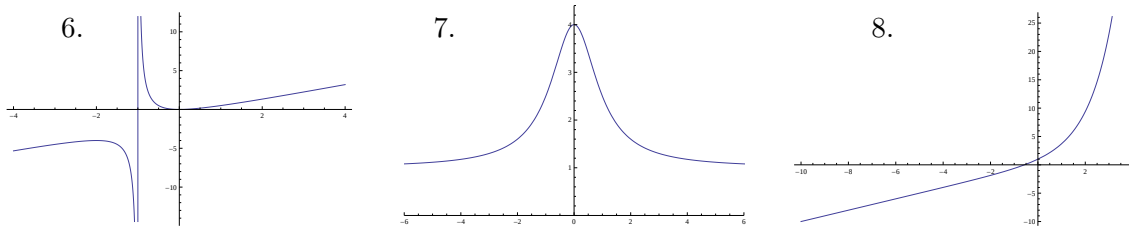


Figura 21: Grafici delle funzioni degli esempi 6-8.

9.7 Schema finale per lo studio del grafico di una funzione

Utilizzando gli ultimi risultati possiamo raffinare lo schema da seguire per lo studio di una funzione $f(x)$:

1. Determinare il dominio D_f della funzione
2. Determinare l'andamento della funzione agli estremi del dominio.
3. Calcolare la derivata prima $f'(x)$
4. Determinare i punti stazionari di f , cioè i punti $\bar{x}$ tali che $f'(\bar{x}) = 0$.
5. Calcolare la derivata seconda $f''(x)$.
6. Studiare il segno della derivata seconda nei punti stazionari $\bar{x}$ per individuare i punti di minimo relativo (se $f''(\bar{x}) > 0$) e di massimo relativo (se $f''(\bar{x}) < 0$).
7. Se $f''(\bar{x}) = 0$ studiare il segno della derivata prima in un intorno di $\bar{x}$ per determinare se $\bar{x}$ è un punto di minimo (se $f'(x) < 0$ per $x < \bar{x}$ e $f'(x) > 0$ per $x > \bar{x}$) o di massimo (se $f'(x) > 0$ per $x < \bar{x}$ e $f'(x) < 0$ per $x > \bar{x}$) o di flesso (se $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno in un intorno di $\bar{x}$ tranne che in $\bar{x}$, dove si annulla).
8. Studiare in ogni caso il segno della derivata prima $f'(x)$ per determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente e gli intervalli in cui è decrescente.
9. Calcolare eventuali asintoti verticali, orizzontali e obliqui.
10. Determinare – se esistono e se possibile – i punti in cui la funzione $f(x)$ attraversa l'asse x , cioè i punti $\bar{x}$ tali che $f(\bar{x}) = 0$, e – se esiste e se possibile – il punto in cui attraversa l'asse y , cioè il valore $f(0) = 0$.

Osservazioni:

1. Se calcolare la derivata seconda risulta troppo laborioso, può comunque essere più comodo determinare se il punto stazionario $\bar{x}$ è un punto di massimo o di minimo relativo studiando direttamente il segno di $f'(x)$ in un intorno di $\bar{x}$, come indicato al punto 7.
2. L'ordine in cui studiare i vari punti elencati sopra non è tassativo: per esempio, dal momento, che lo studio della derivata prima è comunque necessario per studiare dove la funzione è crescente e dove è decrescente, il punto 8 può essere studiato subito dopo il punto 3. Analogamente, il punto 10 può essere studiato all'inizio, per esempio se risulta particolarmente semplice.

9.8 Esercizi

1. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$.
2. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
3. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2}$.
4. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$.
5. Si studi il grafico della funzione $f(x) = x e^{-x^2}$.
6. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}$.
7. Si studi il grafico della funzione $f(x) = e^{-|x|}(x^2 + 4)$.
8. Si studi il grafico della funzione $f(x) = e^{-|x|}|x^2 - 1|$.
9. Si studi il grafico della funzione $f(x) = x e^{-2x^2+3x+1}$.
10. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$.
11. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
12. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$.
13. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{-1 + (x+2)^2}{x}$.

14. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$.

15. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$.

I grafici delle funzioni sono riportati in Figura 22 e 23.

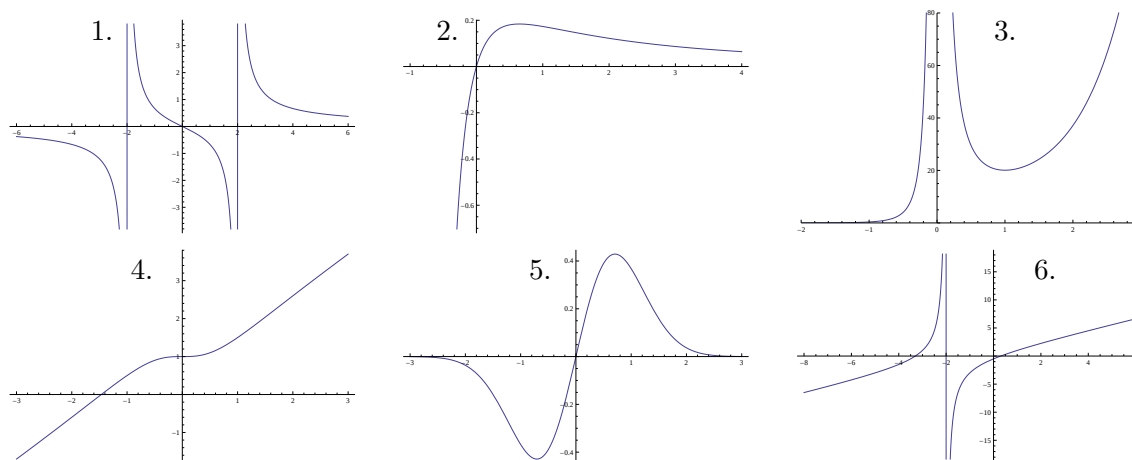


Figura 22: Grafici delle funzioni degli esercizi 1-6 di §9.8.

10 Vettori

10.1 Vettori nel piano

Si fissi un sistema di riferimento ortogonale in $\mathbb{R}^2$ e si indichi con O l'origine del sistema.

Definizione 10.1. Sia P un punto del piano cartesiano. Il segmento di estremi O e P , orientato da O a P , si chiama vettore che parte dal punto O e arriva al punto P e sarà indicato con il simbolo $\overrightarrow{OP}$.

Osservazioni:

1. Dato il vettore $\overrightarrow{OP}$, si dice che il vettore è applicato in O . Il punto di applicazione può essere diverso da O : dati due punti Q e P del piano si può considerare il vettore $\overrightarrow{QP}$ che parte dal punto Q e arriva al punto P . Tale vettore è applicato in Q .
2. Fissata l'origine O , c'è corrispondenza biunivoca tra punti P del piano e vettori $\overrightarrow{OP}$ applicati in O .

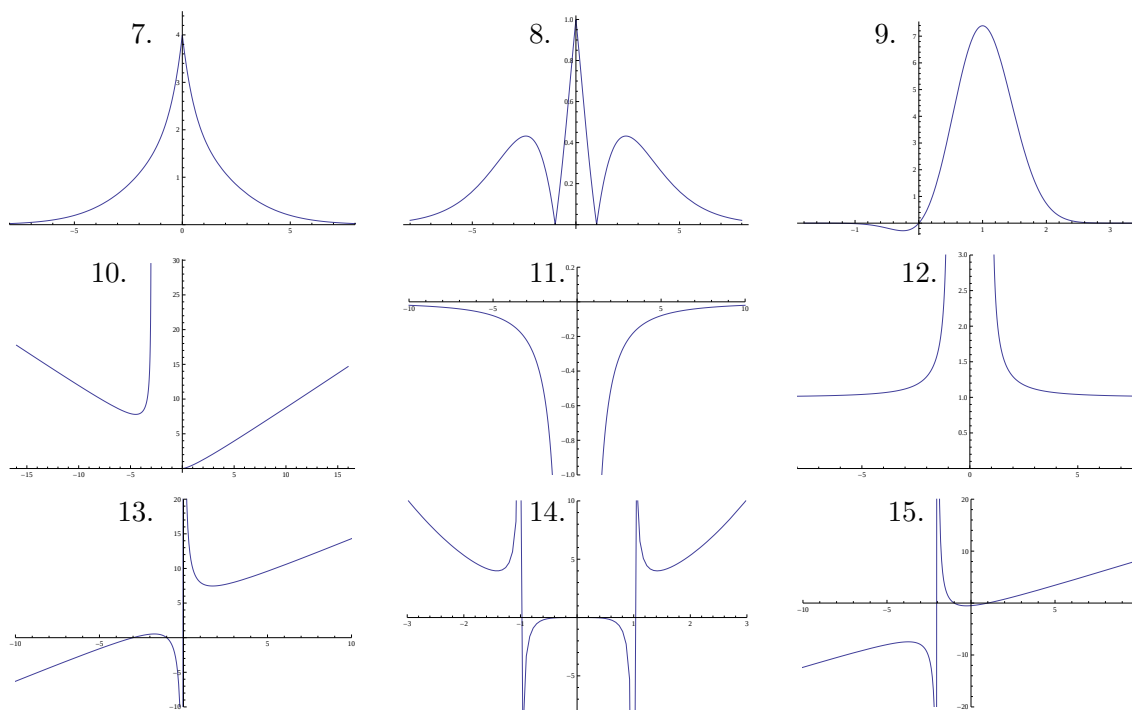


Figura 23: Grafici delle funzioni degli esercizi 7-15 di §9.8.

3. Ogni vettore $\overrightarrow{OP}$ è caratterizzato da: lunghezza, direzione e verso. La *lunghezza* si indica con $|\overrightarrow{OP}|$ ed esprime la lunghezza del segmento di estremi i due punti O e P , la *direzione* è data dal fascio di rette parallele alla retta che passa per i due punti e il *verso* indica verso quale dei due punti il vettore è orientato.
4. La lunghezza di un vettore è chiamato anche *modulo* del vettore.
5. Se $\vec{v}$ denota il segmento orientato che unisce due punti qualsiasi del piano, allora $\vec{v}$ è caratterizzato da: lunghezza, direzione, verso e punto d'applicazione.
6. In particolare due vettori $\overrightarrow{Q_1P_1}$ e $\overrightarrow{Q_2P_2}$, applicati rispettivamente in Q_1 e in Q_2 , avranno la stessa direzione se la retta passante per i punti Q_1 e P_1 e la retta passante per i punti Q_2 e P_2 sono tra loro parallele. Diremo che i due vettori sono *paralleli* se hanno lo stesso verso e *antiparalleli* se hanno versi opposti.

Definizione 10.2. Un vettore $\vec{v}$ di lunghezza unitaria (i.e. tale che $|\vec{v}| = 1$) si chiama versore. I due vettori di lunghezza unitaria applicati in O , diretti uno lungo l'asse x e l'altro lungo l'asse y , nel verso delle x e y crescenti, rispettivamente, sono chiamati versori del piano: il primo è il versore dell'asse x e il secondo è il versore dell'asse y .

Osservazioni:

1. Il versore dell'asse x si indica con $\vec{i}$ e il versore dell'asse y si indica con $\vec{j}$.
2. Fissato il punto P del piano cartesiano si può identificare P con una coppia ordinata di numeri x, y . Se $\vec{v}$ è il vettore che parte dall'origine e arriva al punto P possiamo allora scrivere $\vec{v} = (x, y)$.

Definizione 10.3. *Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, applicati nello stesso punto, si definisce somma dei due vettori il vettore $\vec{v} + \vec{w}$ individuato dalla diagonale principale del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.*

Osservazioni:

1. Se i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione, il parallelogramma degenera in un segmento la cui lunghezza è data dalla somma delle lunghezze dei due vettori: in tal caso possiamo identificare la diagonale con tale segmento.
2. La somma di due vettori si ottiene quindi con la costruzione geometrica rappresentata in Figura 24.

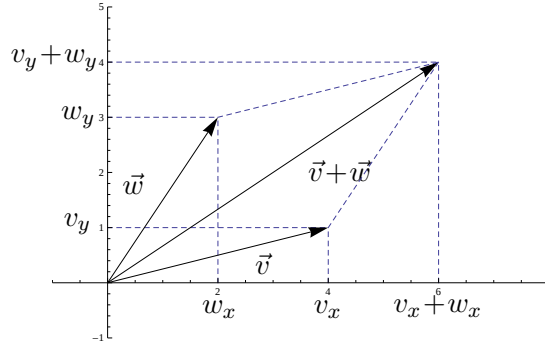


Figura 24: Somma di vettori.

3. Se $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$, possiamo scrivere $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$; cfr. Figura 25. I due numeri x e y sono le *componenti* del vettore $\vec{v}$: se φ denota l'angolo che il vettore $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse x , si ha $x = |\overrightarrow{OP}| \cos \varphi$ e $y = |\overrightarrow{OP}| \sin \varphi$. Per il teorema di Pitagora abbiamo allora $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. Se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j}$, allora si ha $\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x)\vec{i} + (v_y + w_y)\vec{j}$; cfr. Figura 24.

Definizione 10.4. *Dato un vettore $\vec{v}$ e un numero reale $\alpha \neq 0$ si indica con $\alpha\vec{v}$ il vettore che ha la stessa direzione di $\vec{v}$, lunghezza $|\alpha| |\vec{v}|$ e verso concorde con $\vec{v}$ se $\alpha > 0$ e opposto se $\alpha < 0$.*

Osservazioni:

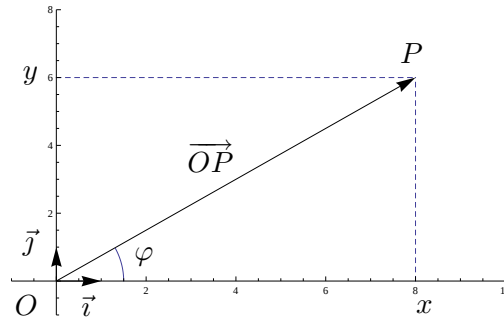


Figura 25: Componenti di un vettore.

1. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, la differenza di due vettori $\vec{v} - \vec{w}$ può essere visto come la somma dei due vettori $\vec{v}$ e $-\vec{w}$, dove $-\vec{w}$ è il vettore $\alpha\vec{w}$ con $\alpha = -1$; cfr. Figura 26. In particolare, se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j}$ si ha $\vec{v} - \vec{w} = (v_x - w_x)\vec{i} + (v_y - w_y)\vec{j}$.
2. Se $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, allora $\alpha\vec{v} = \alpha v_x\vec{i} + \alpha v_y\vec{j}$.

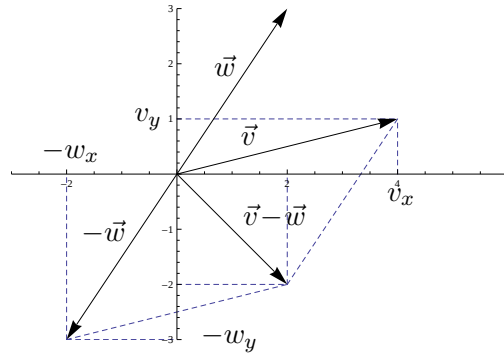


Figura 26: Differenza di vettori.

Definizione 10.5. Si definisce vettore nullo $\vec{0}$ il vettore tale che:

1. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ per ogni vettore $\vec{v}$.
2. $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $0\vec{v} = \vec{0}$.

Osservazione: il vettore nullo è quindi il vettore di componenti $(0, 0)$.

10.2 Rette nel piano

Dato il vettore $\overrightarrow{OP_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, il vettore $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OP_0} = tx_0\vec{i} + ty_0\vec{j}$ è il vettore di componenti

$$\begin{cases} x = tx_0, \\ y = ty_0. \end{cases}$$

Al variare di $t \in \mathbb{R}$, le equazioni si chiamano *equazioni parametriche della retta* individuata dal vettore $\overrightarrow{OP_0}$. Possiamo allora scrivere $t = x/x_0 = y/y_0$, ottenendo

$$y = \frac{y_0}{x_0}x,$$

che prende il nome di *equazione cartesiana della retta* r individuata dal vettore $\overrightarrow{OP_0}$. Per costruzione r è una retta passante per l'origine.

Più in generale si possono considerare due punti qualsiasi del piano, P_1 e P_2 , di cui non necessariamente uno sia l'origine. Sia $\overrightarrow{P_1P_2}$ il vettore applicato in $P_1 = (x_1, y_1)$ che arriva al punto $P_2 = (x_2, y_2)$. Un punto $P = (x, y)$ appartiene alla retta passante per $\overrightarrow{P_1P_2}$ se $\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2}$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Se scriviamo $P_2 = (x_1 + (x_2 - x_1), y_1 + (y_2 - y_1))$ e $P = (x_1 + (x - x_1), y_1 + (y - y_1))$, si deve allora avere

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

per qualche $t \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1). \end{cases}$$

Se $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$, eliminando il parametro t si ottiene

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

che è l'*equazione cartesiana* della retta r passante per i due punti P_1 e P_2 . Per costruzione r è parallela al vettore $\vec{v} = (a, b)$, con $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$. Quindi il vettore $\vec{v}$ individua la direzione della retta r ; cfr. Figura 27.

Possiamo riscrivere l'equazione come

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x - x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1,$$

che, ponendo

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad p = -x_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1,$$

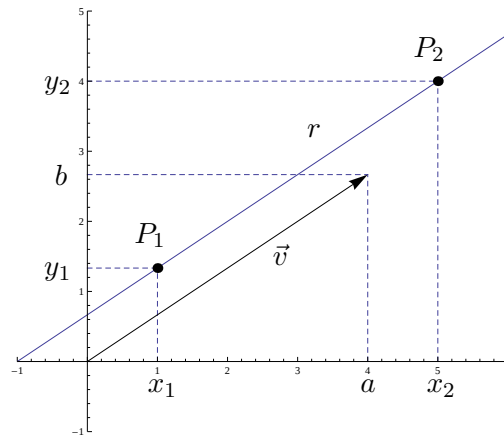


Figura 27: Vettore $\vec{v} = (a, b)$ parallelo alla retta r passante per P_1 e P_2 .

diventa

$$y = kx + p.$$

Ritroviamo quindi l'equazione di una retta con coefficiente angolare k vista in §3.3.

Osservazioni:

1. Mentre le equazioni parametriche si possono definire per qualsiasi valore di x_1, x_2, y_1, y_2 , l'equazione cartesiana scritta sopra ha senso solo se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, ovvero se la retta non è parallela né all'asse x né all'asse y .
2. D'altra parte se $x_1 = x_2$ la retta ha semplicemente equazione $x = x_1$ e se $y_1 = y_2$ la retta ha equazione $y = y_1$.
3. L'equazione cartesiana rappresenta l'equazione di una retta passante per due punti dati P_1 e P_2 : ponendo $x_2 - x_1 = a$ e $y_2 - y_1 = b$ possiamo interpretare l'equazione come l'equazione di una retta passante per un punto dato P_1 e parallela a un vettore dato $\vec{v} = (a, b)$.
4. Partendo invece dall'equazione $y = kx + p$, $k \neq 0$, possiamo ricondurla alla forma $(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$ scrivendo $x + (p/k) = y/k$: quindi la retta passa per il punto $P_1 = (-p/k, 0)$ ed è parallela al vettore $\vec{v} = (1, k)$. In particolare la retta passa anche per il punto $P_2 = (x_2, y_2)$, con $x_2 - x_1 = 1$ e $y_2 - y_1 = k$: quindi $P_2 = (1 - p/k, k)$. Alternativamente si possono individuare due punti per cui la retta passa notando che, se $y = kx + p$, allora $y = p$ per $x = 0$ e $x = -p/k$ per $y = 0$, quindi i punti $(-p/k, 0)$ e $(0, p)$ appartengono alla retta $\implies$ la retta ha equazione $(x + p/k)/(p/k) = y/p$, che, moltiplicando per p/k , dà $x + p/k = y/k$.

Teorema 10.6. *L'equazione cartesiana di una retta nel piano ha la forma $ax + by + c = 0$, dove i coefficienti a e b non sono entrambi nulli.*

Dimostrazione. Se $b \neq 0$ possiamo dividere l'equazione $ax + by + c = 0$ per b e troviamo $y = -(a/b)x - (c/b) = kx + p$, dove $k = -a/b$ e $p = -c/b$, che è l'equazione cartesiana di una retta che non sia parallela all'asse x . Se $b = 0$ allora $ax + c = 0$, ovvero $x = -c/a$: quindi x è costante e l'equazione rappresenta una retta parallela all'asse x . ■

Osservazione: in conclusione, la retta passante per un punto $P = (x_0, y_0)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (a, b)$ avrà quindi equazione

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

se a e b sono entrambi non nulli. Se $a = 0$ e $b \neq 0$ allora la retta ha equazione $x = x_0$, $y \in \mathbb{R}$ ed è parallela all'asse y ; se invece $b = 0$ e $a \neq 0$ allora la retta ha equazione $y = y_0$, $x \in \mathbb{R}$ ed è quindi parallela all'asse x .

10.3 Vettori linearmente indipendenti

Definizione 10.7. *Dati due vettori $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ e $\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j}$, diremo che i due vettori sono linearmente dipendenti se $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$. Diremo che i due vettori sono linearmente indipendenti se $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$ è possibile solo se α e β sono entrambi nulli.*

Esempi:

1. I vettori di componenti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono linearmente indipendenti.
2. I vettori $(1, 0)$ e $(2, 0)$ sono linearmente dipendenti.

Osservazioni:

1. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, se uno dei due è il vettore nullo, allora essi sono linearmente dipendenti: infatti, se $\vec{w} = \vec{0}$, si ha $\alpha\vec{v} + \beta\vec{0} = \alpha\vec{v} = \vec{0}$ se $\alpha = 0$ indipendentemente dal valore di β (che quindi può essere diverso da zero).
2. Per essere linearmente dipendenti due vettori non nulli devono essere paralleli o antiparalleli, i.e. avere la stessa direzione: infatti se $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$ allora sia α che β devono essere diversi da zero (altrimenti uno dei due vettori dovrebbe essere nullo), quindi possiamo dividere l'equazione, per esempio, per α e ottenere $\vec{v} = \lambda\vec{w}$, con $\lambda = -\beta/\alpha \in \mathbb{R}$.
3. I vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ hanno la seguente proprietà:

- sono linearmente indipendenti;
- $\forall \vec{v} \exists v_x, v_y \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$; cfr. Figura 28.

Quindi ogni vettore del piano si può scrivere come *combinazione lineare* dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Si dice allora che $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ costituisce una *base* per i vettori del piano.

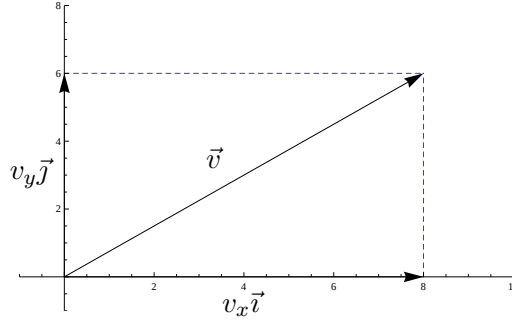


Figura 28: Scomposizione di un vettore $\vec{v}$ nella base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Osservazioni:

1. Più in generale una qualsiasi coppia di vettori linearmente indipendenti costituisce una base per i vettori nel piano. In altre parole, dati due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ linearmente indipendenti, ogni altro vettore $\vec{u}$ si può scrivere come loro combinazione lineare (i.e. esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{u} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$).
2. Se considero tre o più vettori nel piano, questi sono quindi necessariamente linearmente dipendenti.

10.4 Prodotto scalare

Definizione 10.8. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si definisce prodotto scalare dei due vettori il numero reale

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi,$$

dove φ è l'angolo compreso tra i due vettori.

Osservazioni:

1. $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \implies \vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali (i.e. $\varphi = \pi/2$).
2. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli (stessa direzione e stesso verso) $\implies \varphi = 0 \implies \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}|$.
3. $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono antiparalleli (stessa direzione e verso opposto) $\implies \varphi = \pi \implies \vec{v} \cdot \vec{w} = -|\vec{v}| |\vec{w}|$.

4. Si noti che $|\vec{v}| \cos \varphi$ rappresenta la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v}$ sul vettore $\vec{w}$; cfr. Figura 29. Analogamente $|\vec{w}| \cos \varphi$ rappresenta la proiezione ortogonale di $\vec{w}$ su $\vec{v}$.
5. Poiché i versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono ortogonali, si ha $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
6. Si ha $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$ per ogni vettore $\vec{v}$.

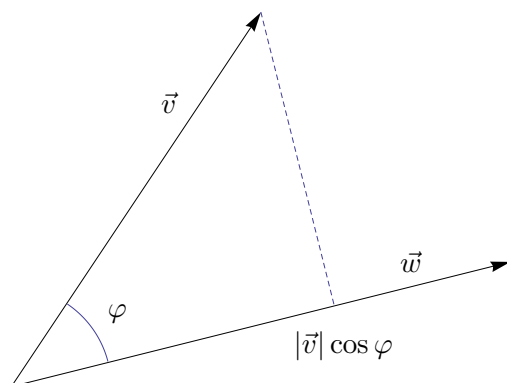


Figura 29: Prodotto scalare di due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e proiezione ortogonale $|\vec{v}| \cos \varphi$.

Proprietà del prodotto scalare:

1. $\forall \vec{v}, \vec{w}$ si ha $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}$ si ha $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \cdot \vec{w} + \vec{v}_2 \cdot \vec{w}$.
3. $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ si ha $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 + \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2 + \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1 + \vec{v}_2 \cdot \vec{w}_2$.
4. $(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
5. $(\alpha \vec{v}) \cdot (\beta \vec{w}) = \alpha\beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
6. $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ e $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} \implies \vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y$.

Dimostrazioni:

1. Segue dalla definizione di prodotto scalare.
2. Si ha $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| |\vec{w}| \cos \varphi$, dove φ è l'angolo tra i vettori $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ e $\vec{w}$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{w} = |\vec{v}_1| |\vec{w}| \cos \varphi_1$, dove φ_1 è l'angolo tra i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{w}$, $\vec{v}_2 \cdot \vec{w} = |\vec{v}_2| |\vec{w}| \cos \varphi_2$, dove φ_2 è l'angolo tra i vettori $\vec{v}_2$ e $\vec{w}$. Si vede graficamente che $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| \cos \varphi = |\vec{v}_1| \cos \varphi_1 + |\vec{v}_2| \cos \varphi_2$ (cfr. Figura 30): infatti $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| \cos \varphi$ è la proiezione del vettore $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sul vettore $\vec{w}$ ed è uguale alla somma della proiezione $|\vec{v}_1| \cos \varphi_1$ di $\vec{v}_1$ e della proiezione $|\vec{v}_2| \cos \varphi_2$ di $\vec{v}_2$ su $\vec{w}$.

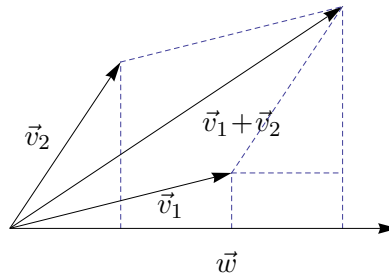


Figura 30: Dimostrazione della proprietà 2.

3. Segue dalle proprietà 1 e 2.
4. Se $\alpha = 0$ la relazione è ovvia. Se $\alpha \neq 0$, sia φ l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$: se $\alpha \geq 0$ si ha $(\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w} = |\alpha\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi = \alpha |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi = \alpha \vec{v} \cdot \vec{w}$, se $\alpha < 0$ si ha $(\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w} = -|\alpha\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi = -|\alpha| |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi = \alpha |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi = \alpha \vec{v} \cdot \vec{w}$.
5. Segue dalla proprietà 1 e 4.
6. Segue dalle proprietà 4 e 5, utilizzando il fatto che $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ e $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Osservazioni:

1. Dato un vettore $\vec{v} = (a, b)$, per individuare un vettore $\vec{w}$ ortogonale a $\vec{v}$ basta imporre che i due vettori abbiano prodotto scalare nullo, i.e. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Se $\vec{w} = (w_x, w_y)$ si deve avere $aw_x + bw_y = 0$: tale relazione è soddisfatta se scegliamo $w_x = -b$ e $w_y = a$. Quindi $\vec{w} = (-b, a)$ è ortogonale a $\vec{v} = (a, b)$.
2. La distanza d di un punto P da una retta r è la distanza di P dal punto Q di r più vicino a P : per calcolare d si individua prima la retta s ortogonale a r e passante per P , si trova quindi il punto Q di intersezione di r con s e si calcola infine la distanza tra i due punti P e Q ; cfr. Figura 31. Quindi se la retta ha equazione $(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$ ed è quindi parallela al vettore (a, b) , con $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$, allora il vettore $(-b, a)$ è ortogonale a r . Quindi la retta s ortogonale a r e passante per P ha equazione $(x - x_0)/(-b) = (y - y_0)/a$. Il punto d'intersezione tra s e r si trova risolvendo quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{(x - x_1)}{a} = \frac{(y - y_1)}{b}, \\ \frac{(x - x_0)}{-b} = \frac{(y - y_0)}{a}, \end{cases}$$

La soluzione $(\bar{x}, \bar{y})$ individua il punto Q e quindi $d = \sqrt{(x_0 - \bar{x})^2 + (y_0 - \bar{y})^2}$.

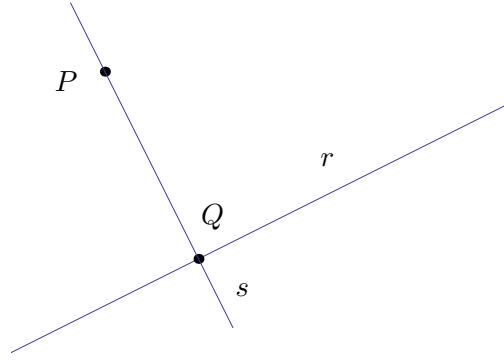


Figura 31: Distanza di un punto da una retta nel piano.

3. Se la retta ha equazione $Ax + By + C = 0$ la distanza d del punto $P = (x_0, y_0)$ dalla retta è espressa dalla formula

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Infatti, se $A, B \neq 0$, si può ragionare come segue a partire dall'Osservazione 2. Si riscrive l'equazione della retta come $x + (B/A)y + (C/A) = 0 \implies x + (C/A) = -(B/A)y \implies (x + (C/A))/B = y/(-A)$, che è l'equazione di una retta passante per il punto $P_1 = (-C/A, 0)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (a, b) = (B, -A)$. Quindi la retta s è parallela al vettore $\vec{w} = (-b, a) = (A, B)$ e passa per il punto P : è quindi descritta dall'equazione $(x - x_0)/A = (y - y_0)/B$. Il punto Q si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} (x + (C/A))/B = y/(-A), \\ (x - x_0)/A = (y - y_0)/B, \end{cases}$$

che possiamo riscrivere

$$\begin{cases} Ax + C + By = 0, \\ Bx - Bx_0 - Ay + Ay_0 = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per B e la seconda per A e facendone la differenza si trova $BC + B^2y + ABx_0 + A^2y - A^2y_0 = 0$, mentre moltiplicando la prima equazione per A e la seconda per B e sommando si trova $A^2x + AC + B^2x - B^2x_0 + AB y_0 = 0$, da cui si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}, \\ \bar{y} = \frac{-ABx_0 + A^2y_0 - BC}{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

Quindi si ottiene

$$\bar{x} - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2} (Ax_0 + By_0 + C), \quad \bar{y} - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2} (Ax_0 + By_0 + C),$$

da cui segue

$$d = \sqrt{\frac{A^2}{(A^2 + B^2)^2} (Ax_0 + By_0 + C)^2 + \frac{B^2}{(A^2 + B^2)^2} (Ax_0 + By_0 + C)^2},$$

che implica immediatamente la formula per d data sopra.

4. Calcolare la distanza di un punto da una retta diventa banale se la retta è parallela a uno degli assi: per esempio se la retta ha equazione $x = x_1$ allora la distanza d del punto $P = (x_0, y_0)$ dalla retta è data semplicemente da $d = |x_1 - x_0|$; se la retta ha equazione $y = y_1$ allora la distanza è $d = |y_1 - y_0|$. Si noti che la formula dell'Osservazione 3 si può applicare anche in tal caso (infatti $A^2 + B^2 = 1$, mentre $Ax_0 + By_0 + C = x_0 - x_1$ se la retta ha equazione $x = x_1$ e $Ax_0 + By_0 + C = y_0 - y_1$ se la retta ha equazione $y = y_1$).

10.5 Vettori nello spazio

Quanto fatto prima si può ripetere per vettori in tre dimensioni. In particolare si considera $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e si introducono tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nelle direzioni dei tre assi ortogonali. Diremo che $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono i *versori dello spazio*: $\vec{i}$ è il versore dell'asse x , $\vec{j}$ è il versore dell'asse y e $\vec{k}$ è il versore dell'asse z . Si può allora introdurre la somma di vettori (attraverso la stessa costruzione del parallelogramma) e il prodotto di un vettore per un numero reale.

Per ogni vettore $\vec{v}$ si può scrivere

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

per opportuni $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}$. I numeri v_x, v_y, v_z si chiamano *componenti* del vettore $\vec{v}$. Possiamo anche scrivere $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, così stabilendo una corrispondenza biunivoca tra vettori e punti dello spazio. La lunghezza del vettore è data da $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Due vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ si dicono linearmente dipendenti se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, tali che $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{0}$, e linearmente indipendenti in caso contrario. Più in generale n vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ si dicono linearmente dipendenti se esistono n numeri reali $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, non tutti nulli, tali che $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$. Diremo al contrario che n vettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono linearmente indipendenti se $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ è possibile solo se $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Il prodotto scalare si introduce come nel caso del piano: dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si ha

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo tra i due vettori.

Valgono le stesse proprietà del caso del piano; ora ovviamente

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z,$$

se $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ e $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$. Si ha quindi

$$\cos \theta = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{|\vec{v}| |\vec{w}|},$$

se θ è al solito l'angolo compreso tra i due vettori.

Osservazioni:

1. Tre vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ nello spazio sono linearmente dipendenti se giacciono sul medesimo piano.
2. Nello spazio il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è tre.
3. Si può estendere la definizione di vettori e di prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, introducendo una base $\{\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n\}$ in $\mathbb{R}^n$, tale che $\vec{i}_k \cdot \vec{i}_k = 1$ per $k = 1, \dots, n$ e $\vec{i}_j \cdot \vec{i}_k = 0$ se $j \neq k$. Allora ogni vettore $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^n$ si può scomporre nella base $\{\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n\}$ scrivendo $\vec{v} = v_1 \vec{i}_1 + \dots + v_n \vec{i}_n$. Dati due vettori $\vec{v} = v_1 \vec{i}_1 + \dots + v_n \vec{i}_n$ e $\vec{w} = w_1 \vec{i}_1 + \dots + w_n \vec{i}_n$ il prodotto scalare dei due vettori è $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$.

10.6 Prodotto vettoriale

Definizione 10.9. Tre vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, con $\vec{v}_3$ ortogonale al piano individuato da $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, formano una terna destrogira se un osservatore diretto lungo $\vec{v}_3$ vede il vettore $\vec{v}_1$ ruotare in verso antiorario per sovrapporsi a $\vec{v}_2$. Se anche $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono ortogonali tra loro si dice che la terna è una terna ortogonale destrogira.

Osservazioni:

1. I tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ di un sistema di riferimento in $\mathbb{R}^3$ formano una terna ortogonale destrogira; cfr. Figura 32.
2. Perché tre vettori formino una terna destrogira è fondamentale l'ordine in cui vengono considerati: per esempio $\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}$ non formano una terna destrogira.

Definizione 10.10. Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si definisce prodotto vettoriale dei due vettori il vettore $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$ che ha lunghezza $|\vec{u}| = |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \theta$, dove θ è l'angolo più piccolo compreso tra i due vettori, direzione ortogonale al piano in cui giacciono $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e verso tale che i tre vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ formano una terna destrogira.

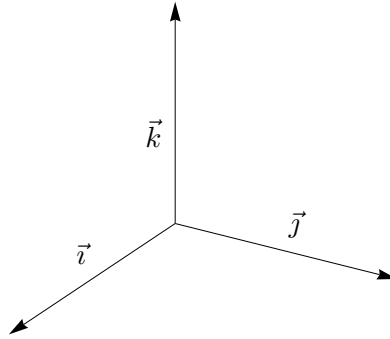


Figura 32: Terna ortogonale destrorsa costituita dai versori dello spazio.

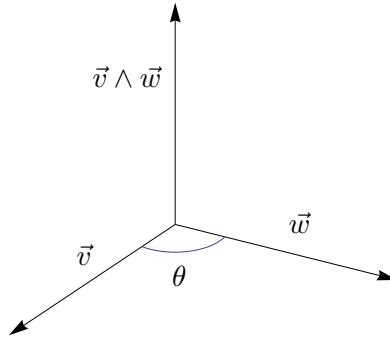


Figura 33: Prodotto vettoriale dei due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Osservazioni:

1. Il prodotto vettoriale di due vettori si ottiene come rappresentato in Figura 33.
2. Dati due vettori si possono considerare due angoli θ_1 e θ_2 compresi tra loro tali che $\theta_1 \in [0, \pi]$ e $\theta_2 = 2\pi - \theta_1 \in [\pi, 2\pi]$. L'angolo θ che interviene nella definizione di prodotto vettoriale è il più piccolo dei due, quindi $\theta = \theta_1$ (ovviamente se $\theta_1 = \pi$ anche $\theta_2 = \pi$ e quindi θ è uno qualsiasi di essi).
3. Il verso del prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$ si può anche determinare con la *regola della mano destra*: tenendo la mano destra in modo che l'indice punti nel verso del vettore $\vec{v}$ e il medio nel verso del vettore $\vec{w}$, allora il pollice, tenuto a novanta gradi rispetto all'indice, punterà nella direzione del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

4. La lunghezza del vettore $\vec{v} \wedge \vec{w}$ è uguale all'area del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Infatti l'area del parallelogramma è dato dal prodotto della base b per l'altezza h : se si considera come base il segmento individuato dal vettore $\vec{v}$ si ha $b = |\vec{v}|$ e $h = |\vec{w}| \sin \theta$, dove θ è appunto l'angolo compreso tra i due vettori.
5. Se $\vec{w} = \vec{0}$ allora $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ per ogni vettore $\vec{u}$.
6. Si noti che il prodotto scalare è un'operazione che associa a due vettori un numero reale, mentre il prodotto vettoriale è un'operazione che associa a due vettori un terzo vettore.

Proprietà del prodotto vettoriale:

1. $\forall \vec{u}$ si ha $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}$ si ha $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
3. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ si ha $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
4. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ si ha $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
5. $\forall \vec{u}, \vec{v}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$.
6. $\forall \vec{u}, \vec{v}$ paralleli o antiparalleli tra loro si ha $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
7. $\forall \vec{u}, \vec{v}$ si ha $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$.

Osservazioni:

1. Se si considerano i tre versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ si ha

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{0}, & \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k}, \\ \vec{j} \wedge \vec{j} &= \vec{0}, & \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \wedge \vec{j} &= -\vec{i}, \\ \vec{k} \wedge \vec{k} &= \vec{0}, & \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j}, & \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j}. \end{aligned}$$

2. Se $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ e $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, si ha

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}.$$

Questo segue immediatamente dall'osservazione precedente e dalle proprietà 3 e 4 del prodotto vettoriale. Le componenti del prodotto vettoriale di due vettori si possono esprimere formalmente come determinante di una matrice 3×3 ; cfr. §12.2.

10.7 Rette nello spazio

Siano $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ due punti in $\mathbb{R}^3$ e sia $P = (x, y, z)$ un punto generico. Il punto P si troverà sulla retta passante per i punti P_1 e P_2 se $\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2}$, ovvero se

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = t(z_2 - z_1). \end{cases}$$

Se $x_2 \neq x_1$, $y_2 \neq y_1$ e $z_2 \neq z_1$, eliminando il parametro t , si trova

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che rappresentano l'*equazione cartesiana di una retta nello spazio*. Per costruzione tale retta è parallela al vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ ed è quindi parallela al vettore $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (in particolare non è parallela a nessuno degli assi sotto le ipotesi fatte sulle coordinate dei punti).

Se al contrario, per esempio, $z_1 = z_2$ allora la retta giace nel piano $z = z_1$. Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, è individuata dall'equazione

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

esattamente come nel caso delle rette del piano: l'unica differenza è che il piano non è il piano xy (cioè $z = 0$), ma il piano $z = \text{cost}$. Analogamente si discutono i casi in cui si ha $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$ (retta nel piano $x = x_1$) oppure $y_1 = y_2$, $x_1 \neq x_2$, $z_1 \neq z_2$ (retta nel piano $y = y_1$). Se $z_1 = z_2$ e $y_1 = y_2$, allora la retta ha equazione $z = z_1$ e $y = y_1$ ed è quindi parallela all'asse x ; se $z_1 = z_2$ e $x_1 = x_2$ la retta ha equazione $z = z_1$ e $x = x_1$ ed è quindi parallela all'asse y ; se infine $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ la retta ha equazione $x = x_1$ e $y = y_1$ ed è quindi parallela all'asse z .

Osservazione: quindi l'equazione di una retta passante per il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore (a, b, c) ha equazione:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

purché i tre numeri a, b, c siano tutti non nulli. Se $a = 0$ e $b, c \neq 0$, allora la retta giace nel piano $x = x_0$ e è diretta lungo il vettore $\vec{v} = (0, b, c)$: quindi ha equazione

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad x = x_0.$$

Analogamente, se $b = 0$ e $a, c \neq 0$ la retta ha equazione

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \quad y = y_0,$$

mentre se $c = 0$ e $a, b \neq 0$ la retta ha equazione

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad z = z_0.$$

Infine, se $a = b = 0$ e $c \neq 0$ la retta ha equazione $x = x_0, y = y_0, z \in \mathbb{R}$ (ed è quindi parallela all'asse z), se $a = c = 0$ e $b \neq 0$ la retta ha equazione $x = x_0, z = z_0, y \in \mathbb{R}$ (ed è quindi parallela all'asse y), se $b = c = 0$ e $a \neq 0$ la retta ha equazione $y = y_0, z = z_0, x \in \mathbb{R}$ (ed è quindi parallela all'asse x).

10.8 Piani

Dati due vettori $\overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{P_0P_2}$, esiste un piano π che li contiene. Indichiamo con $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ il versore normale al piano π . Perché un punto P appartenga al piano π occorre che si abbia $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, ovvero

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Quindi l'equazione cartesiana di un piano è data da

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dove $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Esempi:

1. $x - y + 3z + 2 = 0$ è l'equazione del piano con direzione normale $(1, -1, 3)$
2. $x = 0$ è l'equazione del piano yz , $y = 0$ è l'equazione del piano xz , $z = 0$ è l'equazione del piano xy .

Osservazioni:

1. Si noti la profonda differenza tra le equazioni $ax + by + c = 0$ nel piano e $Ax + By + Cz + D = 0$ nello spazio. La prima rappresenta una retta nel piano, la seconda rappresenta un piano nello spazio. In particolare l'equazione $ax + by + c = 0$ in $\mathbb{R}^3$ rappresenta un piano (l'equazione è della forma $Ax + By + Cz + D = 0$, con $A = a, B = b, C = 0$ e $D = c$), più precisamente del piano π parallelo all'asse z che interseca il piano xy lungo la retta r che, in quel piano, ha equazione $ax + by + c = 0$; cfr. Figura 34.
2. Dato un punto P non appartenente al piano π , la distanza d di P dal piano è data dalla distanza tra il punto P e il punto Q del piano più vicino a P : per calcolare d

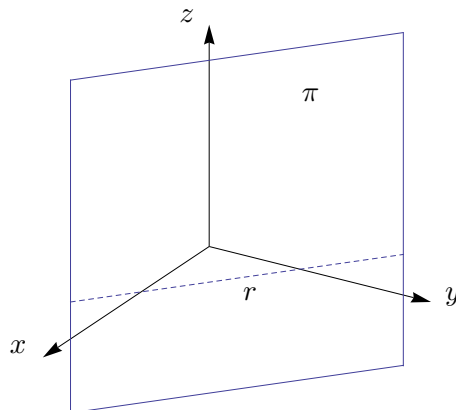


Figura 34: Intersezione del piano $Ax + By + D = 0$ con il piano xy .

si determina prima la retta ortogonale al piano π passante per P , si trova quindi il punto d'intersezione Q tra il piano π e la retta r e si calcola infine la distanza tra i due punti P e Q , ovvero la lunghezza del vettore $\overrightarrow{PQ}$; cfr. Figura 35. Quindi se il piano ha equazione $ax + by + cz + d = 0$ e il punto ha coordinate $P = (x_0, y_0, z_0)$ si procede come segue: (1) il vettore $n = (a, b, c)$ è ortogonale al piano; (2) la retta r deve passare per P e avere la stessa direzione di n , quindi ha equazione

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c};$$

(3) imponendo che (x, y, z) risolva contemporaneamente l'equazione cartesiana della retta e l'equazione del piano si trovano le coordinate del punto Q ; (4) il modulo del vettore $\overrightarrow{PQ}$ è uguale a d .

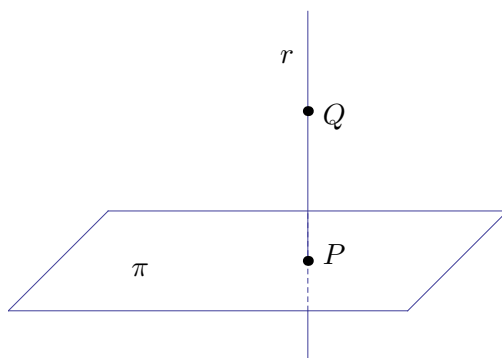


Figura 35: Distanza di un punto da un piano.

3. Se si considera il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x - x_1 = (y - y_1) \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \\ y - y_1 = (z - z_1) \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1}, \end{cases}$$

notiamo che ciascuna di esse rappresenta l'equazione di un piano e le due equazioni insieme rappresentano l'equazione di una retta: si tratta ovviamente della retta data dall'intersezione dei due piani.

10.9 Esercizi

- Siano $\vec{v} = (2, -3, 1)$ e $\vec{w} = (1, -2, 0)$. Calcolare:
 - le coordinate del versore $\hat{w}$ con la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{w}$;
 - la proiezione di $\vec{v}$ su $\vec{w}$;
 - il coseno dell'angolo φ tra i vettori $\vec{v} + \vec{w}$ e $-\vec{w}$;
 - l'area A del parallelogramma di vertici $\vec{0}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$.
- Sia $\vec{v} = (-1, 3)$. Trovare un vettore $\vec{w}$ tale che:
 - $\vec{w}$ sia ortogonale a $\vec{v}$ e $|\vec{w}| = 3$.
 - $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}|$, $|\vec{w}| = 10$.
 - $\vec{v} \cdot \vec{w} = -2$, $|\vec{w}| = 2$.
 - $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano un angolo $\pi/3$ e $|\vec{w}| = 2/\sqrt{10}$.
- Siano $\vec{v} = (-2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 2)$. Calcolare:
 - l'area A_1 del parallelogramma di vertici 0 , $-\vec{v}$, $-\vec{w}$ e $-\vec{v} - \vec{w}$;
 - l'area A_2 del parallelogramma di vertici 0 , $-\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{w} - \vec{v}$;
 - l'area A_3 del triangolo di vertici 0 , $-\vec{v}$ e $\vec{w}$.
- Sia $\vec{v} = (1, 3, 2)$. Calcolare:
 - il versore $\hat{w}$ ortogonale a $\vec{v}$ giacente sul piano xy ;
 - la proiezione del vettore $\vec{u} = (1, -1, 2)$ su $\vec{v}$;
 - il coseno dell'angolo φ tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
 - il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- Dati i vettori $\vec{v}_1 = (2, 4)$, $\vec{v}_2 = (-5, 1)$ e $\vec{v}_3 = (-2, 1)$, calcolare tutti i possibili prodotti scalari che si possono ottenere prendendo due tra i tre vettori e determinare se ci sono due vettori ortogonali.
- Determinare per quale valore di k i due vettori $\vec{v}_1 = (k, -1, 3)$, $\vec{v}_2 = (k, 2k, -5)$ sono ortogonali.

7. Determinare se i vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sono linearmente dipendenti e, in caso di risposta affermativa, esprimere uno dei tre come combinazione lineare degli altri due:
 - (1) $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 3)$;
 - (2) $\vec{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$;
 - (3) $\vec{v}_1 = (0, 3, 3)$, $\vec{v}_2 = (1/2, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1/2, -1, 0)$.
8. Siano $\vec{v} = (1, -3, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$. Calcolare:
 - (1) la lunghezza di $\vec{v}$ e di $\vec{w}$;
 - (2) il versore $\hat{v}$ con la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$;
 - (3) il versore $\hat{w}$ con la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{w}$;
 - (4) il prodotto scalare $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$;
 - (5) il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$;
 - (6) l'area A del parallelogramma di vertici $\vec{0}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$.
9. Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della retta del piano passante per i punti $P_1 = (1, 4)$ e $P_2 = (3, 1)$.
10. Trovare l'equazione della retta r del piano xy passante per il punto $P = (6, 1)$ e ortogonale al vettore $\vec{v} = (1, 1)$.
11. Trovare la distanza d del punto $P = (2, 1)$ dalla retta r di equazione $y = x - 4$.
12. Trovare la distanza d del punto $P = (1, 1)$ dalla retta r di equazione $y = -x - 1$.
13. Calcolare la distanza d del punto $P = (2, -3, 4)$ dal piano π di equazione $x + 2y + 2z = 13$.
14. Determinare la retta r data dall'intersezione dei piani $x + y + z = 0$ e $x - y - 2z = 1$.

Soluzioni.

1. (1) $\hat{w} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 0)$; (2) $\vec{v} \cdot \hat{w} = 8/\sqrt{5}$; (3) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -5, 1)$ e $-\vec{w} = (-1, 2, 0) \implies \cos \varphi = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (-\vec{w}) / |\vec{v} + \vec{w}| |\vec{w}| = -13/5\sqrt{7}$; (4) $\vec{v} \wedge \vec{w} = (2, 1, -1) \implies A = |\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{6}$.
2. (1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = -w_x + 3w_y = 0$, $|\vec{w}|^2 = w_x^2 + w_y^2 = 3^2 = 9 \implies \vec{w} = (-9/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$ oppure $\vec{w} = (9/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$; (2) $|\vec{v}| = \sqrt{10}$, $\vec{w} = \alpha \vec{v} \implies \vec{w} = \sqrt{10} \vec{v}$; (3) $\vec{v} \cdot \vec{w} = -w_x + 3w_y = -2$, $|\vec{w}|^2 = w_x^2 + w_y^2 = 2^2 = 4 \implies \vec{w} = (-8/5, -6/5)$ oppure $\vec{w} = (2, 0)$; (4) $\vec{v} \cdot \vec{w} = -w_x + 3w_y = \sqrt{10} \cdot (2/\sqrt{10}) \cdot \cos(\pi/3) = 1$ e $|\vec{w}|^2 = w_x^2 + w_y^2 = (2/\sqrt{10})^2 = 2/5 \implies \vec{w} = ((-1-3\sqrt{3})/10, (3-\sqrt{3})/10)$ oppure $\vec{w} = ((-1+3\sqrt{3})/10, (3+\sqrt{3})/10)$.
3. Possiamo considerare i vettori in $\mathbb{R}^3$ ponendo $\vec{v} = (-2, 1, 0)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, quindi:
 - (1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = (0, 0, -5) \implies A_1 = |(-\vec{v}) \wedge (-\vec{w})| = |\vec{v} \wedge \vec{w}| = 5$;
 - (2) $A_2 = |(-\vec{v}) \wedge \vec{w}| = |\vec{v} \wedge \vec{w}| = 5$;
 - (3) $A_3 = A_2/2 = |\vec{v} \wedge \vec{w}|/2 = 5/2$.

4. (1) $\hat{w} = (w_x, w_y, w_z)$ deve soddisfare le condizioni: $\hat{w} \cdot \vec{v} = w_x + 3w_y + 2w_z = 0$, $w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1$ e $w_z = 0 \implies \hat{w} = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 0)$ oppure $\hat{w} = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10}, 0)$;
 (2) $|\vec{v}| = \sqrt{14} \implies \vec{u} \cdot \vec{v}/|\vec{v}| = 2/\sqrt{14}$; (3) $\cos \varphi = \vec{u} \cdot \vec{v}/|\vec{v}| |\vec{u}| = 2/\sqrt{14 \cdot 6} = 1/\sqrt{21}$;
 (4) $\vec{v} \wedge \vec{u} = (8, 0, -4)$.
5. $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -6$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$, $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 11 \implies v_1$ e v_3 sono ortogonali.
6. $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = k^2 - 2k - 15 = 0$ se $k = 1 \pm 4 \implies k = 5$ oppure $k = -3$.
7. (1) Scrivendo $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0$ si trova $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies$ i vettori sono linearmente indipendenti; (2) scrivendo $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0$ si trova $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies$ i vettori sono linearmente indipendenti; (3) scrivendo $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0$ si trova che l'equazione è soddisfatta richiedendo che sia $3\alpha_1 = -2\alpha_2$ e $\alpha_3 = -\alpha_2$: per esempio, se $\alpha_2 = -3$ otteniamo $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 3 \implies$ i vettori sono linearmente dipendenti e, in particolare, si può scrivere uno qualsiasi di essi come combinazione lineare degli altri due (per esempio $\vec{v}_1 = (3/2)\vec{v}_2 - (3/2)\vec{v}_3$).
8. $|\vec{v}| = \sqrt{14}$ e $|\vec{w}| = 3$; (2) $\hat{v} = (1/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14})$; (3) $\hat{w} = (-1/3, 2/3, 2/3)$;
 (4) $\vec{v} - \vec{w} = (2, -5, 0) \implies \vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 17$; (5) $\vec{v} \wedge \vec{w} = (-10, -4, -1)$; (6) $A = |\vec{v} \wedge \vec{w}| = \sqrt{117}$.
9. Le equazioni parametriche sono $x = 1 + 2t$, $y = 4 - 3t$. Poiché i punti hanno sia coordinate x che coordinate y diverse tra loro possiamo scrivere $(x - 1)/(3 - 1) = (y - 4)/(1 - 4) \implies$ l'equazione cartesiana della retta è $3x + 2y - 11 = 0$.
10. La retta r è parallela a un qualsiasi vettore $\vec{w}$ ortogonale a $\vec{v}$. Il vettore $\vec{w} = (w_x, w_y)$ deve essere tale che $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y = w_x + w_y = 0 \implies w_y = -w_x$, quindi, per esempio, $\vec{w} = (-1, 1) \implies$ la retta r dovrà essere parallela a $\vec{w}$ e passare per P , quindi avrà equazione $(x - 6)/(-1) = (y - 1)/1$, da cui si ottiene l'equazione cartesiana $x + y - 7 = 0$.
11. La retta r ha equazione $x = y + 4$, quindi passa per il punto $R = (0, -4)$ ed è parallela al vettore $\vec{v} = (1, 1)$. Quindi ogni retta ortogonale a r deve avere la direzione del vettore $\vec{w} = (-1, 1)$ ortogonale a $\vec{v}$. La retta s passante per P e ortogonale a r ha quindi equazione $(x - 2)/(-1) = (y - 1)/1$, ovvero $-x + 2 = y - 1$. Il punto Q di intersezione tra le due rette r e s ha coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$, dove $(\bar{x}, \bar{y})$ risolve il sistema di equazioni
- $$\begin{cases} x - y - 4 = 0, \\ x + y - 3 = 0, \end{cases}$$
- ovvero $\bar{x} = 7/2$ e $\bar{y} = -1/2$. Quindi $d = \sqrt{(2 - 7/2)^2 + (1 + 1/2)^2} = 3/\sqrt{2}$.
12. La retta r ha equazione $x + 1 = -y$, quindi passa per il punto $R = (-1, 0)$ ed è parallela al vettore $\vec{v} = (1, -1)$. Quindi il vettore $\vec{w} = (1, 1)$ è ortogonale a r . La

retta s passante per P e parallela a $\vec{w}$ ha quindi equazione $(x-1)/1 = (y-1)/1$, ovvero $x = y$. Il punto Q di intersezione tra le due rette r e s ha coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$, dove $(\bar{x}, \bar{y})$ risolve il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

ovvero $\bar{x} = \bar{y} = -1/2$. Quindi $d = \sqrt{(1+1/2)^2 + (1+1/2)^2} = 3/\sqrt{2}$.

13. Il vettore $\vec{n} = (1, 2, 2)$ è ortogonale al piano. La retta r parallela a $\vec{n}$ e passante per il punto P ha equazione cartesiana $(x-2)/1 = (y+3)/2 = (z-4)/2$. Il punto d'intersezione della retta r con il piano sarà il punto Q di coordinate (x, y, z) tale che $x-2 = (y+3)/2$, $x-2 = (z-4)/2$ (poiché appartiene alla retta r) e $x+2y+2z = 13$ (poiché appartiene al piano). Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 4 = y + 3, \\ 2x - 4 = z - 4, \\ x + 2y + 2z = 13, \end{cases}$$

si trova $Q = (3, -1, 6) \implies$ la distanza d tra P e π è data dalla distanza tra i due punti P e Q ed è quindi uguale a $|\overrightarrow{PQ}|$, dove $\overrightarrow{PQ} = (3-2, -1+3, 6-4) = (1, 2, 2)$, quindi $d = 3$.

14. Sommando le equazioni dei due piani otteniamo $2x - z = 1$, mentre la loro differenza dà $2y + 3z = -1$. Possiamo riscrivere le due equazioni nella forma

$$x - \frac{1}{2} = \frac{y + \frac{1}{2}}{-3} = \frac{z}{2},$$

che rappresenta dunque l'equazione cartesiana della retta parallela al vettore $\vec{v} = (1, -3, 2)$ e passante per il punto $P = (1/2, -1/2, 0)$.

11 Matrici e sistemi di equazioni lineari

11.1 Matrici

Definizione 11.1. Si chiama matrice $n \times m$ una tabella A di $n \cdot m$ numeri disposti su n righe e m colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ si chiama l'elemento della i -esima riga e j -esima colonna.

Osservazioni

1. Se $n = m = 1$ la matrice A è costituita dal solo elemento a_{11} , quindi si riduce a un numero reale.
2. Se $n = m$ la matrice si dice *matrice quadrata*. In tal caso gli elementi a_{ii} si chiamano *elementi diagonali* e il loro insieme costituisce la *diagonale* della matrice. Gli elementi a_{ij} , con $i \neq j$, si chiamano elementi fuori dalla diagonale.

Definizione 11.2. Siano A e B due matrici $n \times m$ di elementi a_{ij} e b_{ij} , rispettivamente. Si definisce somma delle due matrici, e si indica con $C = A + B$, la matrice $n \times m$ di elementi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1/2 & 1/5 & 0 \\ -2 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3/2 & -9/5 & 1 \\ 2 & 3/2 & 5/6 \end{pmatrix}.$$

Definizione 11.3. Sia A una matrice $n \times m$ di elementi a_{ij} e sia α un numero reale. Si indica con αA la matrice $n \times m$ di elementi αa_{ij} .

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Definizione 11.4. La matrice quadrata i cui elementi sono tutti 0 si chiama matrice nulla e si indica con 0.

Definizione 11.5. La matrice quadrata che ha gli elementi diagonali tutti uguali a 1 e gli elementi fuori dalla diagonale tutti uguali a zero si chiama matrice identità e si indica con $\mathbb{1}$.

Definizione 11.6. Una matrice quadrata si dice diagonale se tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli.

11.2 Determinante di una matrice

Daremo una definizione ricorsiva del determinante di una matrice quadrata: in altre parole vedremo che il determinante di una matrice $n \times n$ si può scrivere in termini dei determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$. Quindi una volta che abbiamo definito il determinante di una matrice 1×1 e abbiamo fissato come passare da una matrice $(n-1) \times (n-1)$ a una matrice $n \times n$, possiamo scrivere il determinante di una matrice quadrata qualsiasi.

Definizione 11.7. Sia A una matrice 1×1 . Si definisce determinante di A il numero $\det A = a_{11}$, dove $A = a_{11}$.

Definizione 11.8. Sia A una matrice 2×2 . Si definisce determinante di A il numero

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Definizione 11.9. Sia A una matrice 3×3 . Si definisce determinante di A il numero

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Definizione 11.10. Sia A una matrice $n \times n$. Si indica con A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A togliendo la i -esima riga e la j -esima colonna. Si definisce minore corrispondente ad a_{ij} il determinante della matrice A_{ij} .

Osservazioni:

1. Possiamo scrivere il determinante di una matrice 3×3 come

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} = \sum_{k=1}^3 (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k}.$$

2. La formula sopra esprime il *determinante sviluppato lungo la prima riga*. Si può definire anche il determinante sviluppato secondo la seconda riga o la terza riga, dati da

$$\sum_{k=1}^3 (-1)^{2+k} a_{2k} \det A_{2k}, \quad \sum_{k=1}^3 (-1)^{3+k} a_{3k} \det A_{3k},$$

rispettivamente. Si può allora dimostrare che le tre quantità coincidono con $\det A$.

3. Si può anche definire il determinante sviluppato secondo una delle tre colonne come

$$\sum_{k=1}^3 (-1)^{1+k} a_{k1} \det A_{k1}, \quad \sum_{k=1}^3 (-1)^{2+k} a_{k2} \det A_{k2}, \quad \sum_{k=1}^3 (-1)^{3+k} a_{k3} \det A_{k3},$$

rispettivamente. Di nuovo le tre espressioni coincidono con $\det A$, così che effettivamente il determinante è una proprietà intrinseca della matrice A .

4. Il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ e $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$ si può interpretare come determinante sviluppato secondo la prima riga della “matrice”

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}.$$

Si noti che non si tratta realmente di una matrice perché in base alla Definizione 11.1 gli elementi di una matrice devono essere numeri reali. Tuttavia è utile scrivere il prodotto vettoriale in questa forma.

Definizione 11.11. *Sia A una matrice $n \times n$. Si definisce determinante di A il numero*

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik},$$

dove la riga i -esima si può scegliere in modo arbitrario.

Osservazioni:

1. La formula nella Definizione 11.11 rappresenta lo sviluppo del determinante secondo la i -esima riga. Il risultato quindi non dipende dalla particolare riga scelta.
2. Si può anche considerare lo sviluppo del determinante rispetto a una qualsiasi colonna j . Il risultato non dipende dalla particolare colonna scelta ed è uguale allo sviluppo secondo una delle righe: quindi

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}.$$

A livello pratico, se vogliamo calcolare il determinante di una matrice, conviene scegliere la riga o la colonna in corrispondenza della quale lo sviluppo risulta più semplice. Per esempio può semplificare il conto scegliendo la riga o la colonna che contenga il maggior numero di zeri.

3. Se $n = 3$ l'espressione sopra per il determinante si riduce a quella della Definizione 11.9 se $i = 1$ e a quelle dell'Osservazione 2 di pag. 93 se $i = 2$ o $i = 3$. Analogamente lo sviluppo secondo una colonna considerato all'Osservazione precedente si riduce a quello dell'Osservazione 3 di pag. 93.
4. Se $n = 2$ l'espressione sopra si riduce a quella della Definizione 11.8 sia per $i = 1$ che per $i = 2$.
5. Quindi otteniamo una definizione ricorsiva del determinante di una matrice quadrata $n \times n$ se poniamo:

$$\begin{cases} \det A = A, & n = 1 \\ \det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}, & n \geq 2. \end{cases}$$

6. Se A è una matrice diagonale allora il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi diagonali: $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$. In particolare $\det \mathbb{1} = 1$.

Proprietà dei determinanti:

1. Se una matrice quadrata A ha una riga o una colonna i cui elementi sono tutti nulli allora $\det A = 0$.
2. Se una matrice quadrata A ha due righe o due colonne proporzionali allora $\det A = 0$.

11.3 Prodotto di matrici

Definizione 11.12. Sia A una matrice $n \times m$ di elementi a_{ij} e B una matrice $m \times p$ di elementi b_{ij} . Si definisce prodotto delle due matrici, e si indica con $C = AB$, la matrice $n \times p$ di elementi $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$.

Osservazioni:

1. A volte il prodotto di due matrici è chiamato anche *prodotto righe per colonne*.
2. Il prodotto di una matrice $n \times h$ per una matrice $r \times s$ si può considerare solo se $h = r$. In particolare si può sempre effettuare il prodotto di matrici quadrate che abbiano lo stesso numero di righe (e quindi di colonne).
3. Un vettore $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^n$ può essere visto come una matrice $n \times 1$ (matrice colonna). Se A è una matrice $n \times n$ possiamo allora considerare il prodotto $A\vec{v}$ che definisce una matrice $n \times 1$, i.e. un vettore. Quindi si può considerare il prodotto a destra di una matrice per un vettore e il risultato è un vettore.
4. Nel caso di matrici quadrate, date due matrici A e B , si può considerare sia il prodotto AB sia il prodotto BA . In generale si ha $AB \neq BA$, i.e. il prodotto di matrici non è commutativo.
5. Quando si considera il prodotto di matrici quadrate bisogna quindi specificare se il prodotto è *a destra* o *a sinistra*: date due matrici quadrate A e B , se moltiplichiamo A per B a destra otteniamo la matrice AB , se moltiplichiamo A per B a sinistra otteniamo la matrice BA .
6. Una matrice quadrata A può essere moltiplicata per se stessa: in tal caso si scrive $A^2 = AA$. Analogamente A^k è il prodotto di A per se stessa k volte; in particolare $A^0 = \mathbb{1}$ e $A^1 = A$.

Esempi:

1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 0 & 13/2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

2. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazioni:

1. Ovviamente due matrici possono commutare. Un esempio banale è se una delle due matrici è la matrice nulla o la matrice identità.
2. Un esempio meno banale si ottiene se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha in tal caso

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. Un esempio ancora meno banale è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \implies AB = BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. In generale, date due matrici 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

perché esse commutino occorre che sia

$$a_{12}b_{21} = a_{21}b_{12}, \quad (a_{11} - a_{22})b_{12} = (b_{11} - b_{22})a_{12}, \quad (a_{11} - a_{22})b_{21} = (b_{11} - b_{22})a_{21},$$

che, se gli elementi fuori dalla diagonale sono tutti non nulli, possiamo riscrivere

$$\frac{a_{21}}{a_{12}} = \frac{b_{21}}{b_{12}}, \quad \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{21}} = \frac{b_{11} - b_{22}}{b_{21}}.$$

Proprietà del prodotto tra matrici:

1. Date tre matrici A, B, C che possono essere moltiplicate tra loro si ha $A(B + C) = AB + AC$.
2. Date due matrici A, B che possono essere moltiplicate tra loro e $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $A(\alpha B) = \alpha(AB)$.
3. Date tre matrici A, B, C che possono essere moltiplicate tra loro si ha $A(BC) = (AB)C$.
4. Sia A una matrice $n \times n$ e siano α, β due numeri reali: dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^n$ si ha $A(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha A\vec{v} + \beta A\vec{w}$.
5. Siano A e B due matrici $n \times n$: si ha $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Osservazioni:

1. Sia 0 la matrice nulla. Data una qualsiasi matrice quadrata A , si ha $0A = A0 = 0$.
2. Sia $\mathbb{1}$ la matrice identità. Si verifica facilmente che, data una qualsiasi matrice quadrata A , si ha $\mathbb{1}A = A\mathbb{1} = A$.

11.4 Matrice inversa

Definizione 11.13. Data una matrice A di elementi a_{ij} consideriamo la matrice i cui elementi di indici ij sono uguali agli elementi a_{ji} di A . Tale matrice sarà chiamata la matrice trasposta di A e sarà indicata con A^T .

Proprietà della matrice trasposta:

1. Se le matrici A, B possono essere sommate tra loro si ha $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. Data una matrice A e $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
3. Se A, B sono due matrici che possono essere moltiplicate tra loro anche B^T e A^T possono essere moltiplicate tra loro e si ha $(AB)^T = B^T A^T$.
4. Se A è una matrice quadrata si ha $\det A^T = \det A$.

Definizione 11.14. Data una matrice quadrata A , si chiama inversa di A la matrice B , se esiste, tale che $AB = BA = \mathbb{1}$. Se esiste, la matrice inversa di A è indicata con A^{-1} .

Teorema 11.15. Data una matrice A , se esiste, la matrice inversa A^{-1} è unica.

Dimostrazione. Poiché A^{-1} è inversa di A si ha $AA^{-1} = \mathbb{1}$. Sia B una matrice tale che $AB = BA = \mathbb{1}$. Si ha allora $B = B\mathbb{1} = B(AA^{-1}) = BAA^{-1} = \mathbb{1}A^{-1}$, quindi necessariamente $B = A^{-1}$. ■

Definizione 11.16. Data una matrice A , indichiamo con $\tilde{A}$ la matrice di elementi $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Gli elementi $\tilde{a}_{ij}$ si chiamano cofattori e $\tilde{A}$ si chiama matrice dei cofattori.

Teorema 11.17. Data una matrice A tale che $\det A \neq 0$, esiste A^{-1} e risulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T.$$

Definizione 11.18. Una matrice A si dice non singolare se $\det A \neq 0$. Una matrice A si dice invertibile se esiste A^{-1} .

Osservazioni:

1. In virtù del Teorema 11.17 una matrice è invertibile se e solo se è non singolare.
2. Per calcolare l'inversa di una matrice, si procede quindi come segue. Si calcola innanzitutto il determinante della matrice e si verifica se la matrice è invertibile. Se $\det A \neq 0$, si calcolano quindi i minori degli elementi di A . Si costruisce allora la matrice $\tilde{A}$ i cui elementi $\tilde{a}_{ij}$ sono i minori, a meno del segno che è $+$ se $i+j$ è pari e $-$ se $i+j$ è dispari. Si considera quindi la trasposta di $\tilde{A}$ e si divide ogni elemento per $\det A$. La matrice che si ottiene è l'inversa di A .

Esempi:

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = 2 \neq 0$ e quindi la matrice è invertibile. Si trova:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = -9 \neq 0$ e quindi la matrice è invertibile. Si trova:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/9 & 1/3 & -1/9 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ -4/9 & 1/3 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Proprietà della matrice inversa:

1. Se A, B sono due matrici invertibili che possono essere moltiplicate tra loro anche B^{-1} e A^{-1} possono essere moltiplicate tra loro e si ha $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Se A è una matrice quadrata si ha $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Osservazioni:

1. La matrice $\mathbb{1}$ è invertibile (poiché $\det \mathbb{1} = 1$; cfr. l'Osservazione 6 di pag. 95) e la sua inversa è la matrice stessa (i.e. $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$), come si verifica immediatamente.
2. La proprietà $\det A^{-1} = 1/\det A$ segue immediatamente dal fatto che $A^{-1}A = \mathbb{1}$ (per definizione di inversa) e dalla proprietà dei determinanti $\det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$. Infatti si ha $1 = \det \mathbb{1} = \det(A^{-1}A) = \det A^{-1} \cdot \det A$.
3. La proprietà $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ si dimostra come segue: data la matrice $C = AB$ la sua inversa $C^{-1} = (AB)^{-1}$ deve soddisfare $C^{-1}C = \mathbb{1}$, quindi $C^{-1}AB = \mathbb{1} \implies C^{-1}A = \mathbb{1}B^{-1} = B^{-1} \implies C^{-1} = C^{-1}AA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \implies C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

11.5 Matrici simmetriche

Definizione 11.19. Una matrice quadrata A di elementi a_{ij} si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta, i.e. se $A = A^T$.

Osservazioni:

1. Una matrice A è quindi simmetrica se $a_{ji} = a_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n$.
2. La matrice nulla e la matrice identità sono matrici simmetriche.
3. Più in generale ogni matrice diagonale è simmetrica.
4. Si verifica facilmente che l'inversa di una matrice simmetrica è simmetrica.
Dimostrazione: se A è simmetrica si ha $\mathbb{1} = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T = A(A^{-1})^T$, quindi $(A^{-1})^T = A^{-1}$, per l'unicità dell'inversa (cfr. il Teorema 11.15).

11.6 Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo il sistema di due equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

dove i numeri $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ sono noti. Risolvere il sistema significa trovare i valori x e y per i quali le due equazioni sono soddisfatte.

Se moltiplichiamo la prima equazione per a_{21} e la seconda per a_{11} otteniamo

$$\begin{cases} a_{21}a_{11}x + a_{21}a_{12}y = a_{21}b_1, \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2, \end{cases}$$

così che se sottraiamo la prima equazione dalla seconda troviamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1,$$

ovvero, se $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$,

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Se definiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

la condizione $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ si può riscrivere $\det A \neq 0$.

Analogamente se moltiplichiamo la prima equazione per a_{22} e la seconda per a_{12} otteniamo

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1, \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2, \end{cases}$$

così che se consideriamo la differenza tra la prima e la seconda equazione troviamo

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$

e quindi, sotto la stessa condizione $\det A \neq 0$,

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Possiamo riscrivere allora la soluzione nella forma

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Possiamo riassumere il risultato nel seguente enunciato.

Teorema 11.20. *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

se $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ allora la soluzione è data da

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}.$$

Possiamo riformulare il problema nel modo seguente. Riscriviamo il sistema di equazioni nella forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

ovvero, se $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$, nella forma

$$A\vec{u} = \vec{b}.$$

Sotto l'ipotesi $\det A \neq 0$, esiste la matrice inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

quindi possiamo scrivere

$$\vec{u} = A^{-1}\vec{b}.$$

Se confrontiamo tale espressione con l'espressione della soluzione data dal Teorema 11.20, vediamo subito che le due espressioni coincidono.

Si possono apprezzare i vantaggi di questo secondo modo di procedere se consideriamo sistemi di più equazioni lineari, per esempio

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

dove a_{ij} e b_i sono noti e x, y, z vanno determinati. Se introduciamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$A\vec{u} = \vec{b},$$

dove ora $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$.

Se supponiamo che si abbia $\det A \neq 0$ allora la matrice A è invertibile e quindi la soluzione è data da

$$\vec{u} = A^{-1}\vec{b}.$$

Si verifica immediatamente che possiamo riscrivere la soluzione come rapporto di due determinanti. Vale infatti il seguente risultato, analogo al Teorema 11.20.

Teorema 11.21. *Dato il sistema di equazioni lineari*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

se $\det A \neq 0$ allora la soluzione è data da

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det A} \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det A}, \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}}{\det A}.$$

Rispetto al Teorema 11.21, la formulazione in termini della matrice inversa di A può risultare più vantaggiosa dal punto di vista pratico.

Esempio: se consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + \frac{1}{2}z = 3, \\ x + z = 2, \\ -3x + 2y - z = 0, \end{cases}$$

si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

e $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = (3, 2, 0)$. Si verifica facilmente che $\det A = -1 \neq 0$: per trovare la soluzione dobbiamo quindi calcolare A^{-1} . Con le notazioni di §12.5, si trova

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix},$$

quindi la soluzione è $x = 6$ $y = 7$ e $z = -4$.

In risultato discusso sopra in $\mathbb{R}^3$ si estende al caso di sistemi di n equazioni lineari: vale il seguente risultato (noto come *teorema di Cramer*).

Teorema 11.22. *Dato il sistema di equazioni lineari*

[illegible]

se $\det A \neq 0$, dove A è la matrice dei coefficienti a_{ij} , allora la soluzione è data da

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove i coefficienti $b_1, b_2, \dots, b_n$ occupano la i -esima colonna.

Osservazioni:

1. Il metodo di soluzione dei sistemi di equazioni lineari mediante le formule del Teorema 11.22 prende il nome di *metodo di Cramer*.
2. Analogamente ai casi precedenti con $n = 2$ e $n = 3$, anche nel caso $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi, si può riscrivere il sistema di equazioni nella forma

$$A\vec{u} = \vec{b},$$

dove ora A è la matrice $n \times n$ di elementi a_{ij} , $\vec{u} = x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n$ e $\vec{b} = b_1\vec{v}_1 + \dots + b_n\vec{v}_n$, dove $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ è una base per i vettori in $\mathbb{R}^n$. Se $\det A \neq 0$ allora la matrice A è invertibile e quindi la soluzione è data da

$$\vec{u} = A^{-1}\vec{b}.$$

3. Nel caso in cui si abbia $\det A = 0$ la situazione è più complessa: o non ci sono soluzioni o si possono avere infinite soluzioni, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempi:

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 2, \end{cases}$$

si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi $\det A = 4 - 4 = 0$. In questo caso si vede subito che la seconda equazione si ottiene dalla prima moltiplicandola per 2, quindi in realtà il sistema è equivalente alla sola equazione $2x + y = 1$ che ammette infinite soluzioni. Infatti, per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$, se fissiamo $\bar{y} = 1 - 2\bar{x}$, allora $(\bar{x}, 1 - 2\bar{x})$ è una soluzione.

2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 0, \end{cases}$$

dove la matrice A è la stessa dell'esempio precedente, quindi $\det A = 0$. In questo caso non esistono soluzioni: infatti $4x + 2y = 2(2x + y) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$.

Osservazioni:

1. Si noti che nel caso dell'esempio la matrice A ha due righe proporzionali. È una regola generale, anche per $n > 2$, che se una matrice $n \times n$ ha due righe proporzionali allora il suo determinante è nullo (cfr. la proprietà 2 di §12.2 a pag. 95).
2. Se A è una matrice 2×2 con $\det A = 0$ allora sia le sue righe che le sue colonne sono proporzionali tra loro: infatti se $\det A = 0$ si ha $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ e quindi $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$. Quindi sono possibili due casi: (1) la matrice ha una riga o una colonna di elementi nulli (e quindi l'asserto segue immediatamente) oppure (2) tutti gli elementi sono non nulli e si ha

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}}, \quad \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}};$$

la prima relazione implica che le righe sono proporzionali tra loro e la seconda che le colonne sono proporzionali tra loro.

3. Quindi, dato un sistema di due equazioni lineari della forma $A\vec{u} = \vec{b}$, se $\det A = 0$ le due righe di A sono proporzionali, i.e. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a_{21}x + a_{22}y = \alpha(a_{11}x + a_{12}y)$. Allora, se $b_2 = \alpha b_1$, le due equazioni sono equivalenti all'unica equazione $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ ed esistono infinite soluzioni, mentre se $b_2 \neq \alpha b_1$ le due equazioni sono incompatibili e non esistono soluzioni.

4. In particolare, se A è una matrice 2×2 tale che $\det A = 0$, il sistema $A\vec{u} = \vec{b}$ con $\vec{b} = \vec{0}$ ammette sempre soluzione. Più precisamente esiste sempre una soluzione $\vec{u} \neq \vec{0}$ e ogni vettore con la direzione di $\vec{u}$ è anch'esso soluzione.

11.7 Autovalori e autovettori

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matrice 2×2 . Consideriamo la matrice

$$A - \lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$P_2(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

che è un polinomio di secondo grado in λ . Il polinomio prende il nome di *polinomio caratteristico* di A e le sue radici

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

si chiamano gli *autovalori* di A .

Esempi:

1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.
2. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$, dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria.
3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ si ha $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$.
4. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ si ha $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Osservazioni:

1. Come mostra l'esempio 2 gli autovalori possono non essere reali. Questo succede quando il discriminante $\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ dell'equazione $P_2(\lambda) = 0$ è negativo.
2. Se la matrice A è simmetrica allora gli autovalori sono sempre reali. Infatti se $a_{12} = a_{21}$ il discriminante Δ diventa

$$\Delta = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2$$

e quindi $\Delta \geq 0$. In particolare le due radici coincidono solo se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ (cfr. l'esempio 4); in qualsiasi altro caso la matrice ha autovalori distinti.

Data la matrice A e il vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ si può considerare il vettore $\vec{w} = A\vec{v}$. Si ha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix},$$

quindi $\vec{w} = (a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2)$. In generale il vettore $A\vec{v}$ non ha la stessa direzione di $\vec{v}$, quindi non è proporzionale a $\vec{v}$. Diremo che un vettore non nullo $\vec{v}$ è un *autovettore* di A se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. L'ultima relazione si può riscrivere $(A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$: poiché $\vec{v} \neq \vec{0}$ allora la matrice $A - \lambda\mathbb{1}$ deve essere singolare, i.e. $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$, quindi λ deve essere un autovalore di A . Diremo allora che $\vec{v}$ è l'autovettore corrispondente (o associato o relativo) all'autovalore λ .

Scrivendo la relazione $(A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ per componenti otteniamo

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 = 0, \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ (poiché λ è un autovalore) allora le due equazioni non sono indipendenti e quindi il sistema ammette una soluzione $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

Osservazioni:

1. Il fatto che $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ implica dunque che esiste sempre almeno una soluzione dell'equazione $\det(A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$, quindi per ogni autovalore λ di A esiste sempre almeno un autovettore corrispondente a λ ; cfr. l'Osservazione 4 di pag. 105.
2. Di fatto il sistema ammette infinite soluzioni: infatti se $\vec{v}$ è un autovettore, allora ogni vettore della forma $\alpha\vec{v}$, con $\alpha \neq 0$, è un autovettore corrispondente allo stesso autovalore λ . Infatti si ha $A(\alpha\vec{v}) = \alpha(A\vec{v}) = \alpha(\lambda\vec{v}) = \lambda(\alpha\vec{v})$.

3. L'autovettore corrispondente a un autovalore λ individua quindi una direzione nel piano. Si può allora indicare l'autovettore scegliendo il versore in quella direzione.
4. Quindi quando si dice che “esiste un solo autovettore” corrispondente all'autovalore λ si intende che esiste un'unica direzione tale i vettori $\vec{v}$ con quella direzione risolvono l'equazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Analogamente se si dice che “esistono due autovettori” corrispondenti a λ si intende che esistono due direzioni tali che tutti i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con quelle direzioni risolvono l'equazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. E così via.
5. Sull'autovettore $\vec{v}$ associato all'autovalore λ la matrice agisce come il prodotto per il numero reale λ .
6. Perché il vettore $\vec{w} = A\vec{v}$ sia diretto come $\vec{v}$ occorre quindi che $\vec{v}$ sia un autovettore di A e in tal caso si ha $\vec{w} = \lambda\vec{v}$, dove λ è l'autovalore a cui corrisponde $\vec{v}$.

Esempi:

1. Consideriamo la matrice dell'esempio 1 di pag. 105. Si trova che l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ è $\vec{v}_1 = (1, \sqrt{2})$ (e ogni altro vettore a esso proporzionale), mentre l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ è $\vec{v}_2 = (1, -\sqrt{2})$ (e ogni altro vettore a esso proporzionale).
2. Nel caso dell'esempio 4 si vede facilmente che ogni vettore è un autovettore: possiamo allora scegliere (arbitrariamente) due vettori linearmente indipendenti, per esempio i versori $\vec{v}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1)$ come autovettori corrispondenti all'autovalore $\lambda = 2$. Lo stesso argomento si applica a qualsiasi matrice che sia proporzionale all'identità.

Le definizioni sopra si possono generalizzare al caso di matrici $n \times n$.

Definizione 11.23. Sia A una matrice $n \times n$, data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si definisce polinomio caratteristico di A il polinomio di grado n

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}),$$

dove ora $\mathbb{1}$ è la matrice identità $n \times n$, e si chiamano autovalori di A le radici del polinomio caratteristico. Dato un autovalore λ di A si chiama autovettore corrispondente a λ il vettore $\vec{v}$ tale che $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Teorema 11.24. *Se A è una matrice simmetrica, allora i suoi autovalori sono reali. inoltre essa ammette n autovettori che sono a due a due ortogonali.*

Osservazioni:

1. Sia A una matrice $n \times n$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A . A ogni autovalore λ_k corrisponde un autovettore $\vec{v}_k$: se quindi gli autovalori della matrice A sono tutti distinti, allora la matrice A ammette n autovettori distinti $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Si può anche dimostrare che, in tale caso, gli autovettori sono linearmente indipendenti e quindi $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ costituisce una base in $\mathbb{R}^n$.
2. Se invece la matrice ha p autovalori coincidenti, i.e. se esiste una radice λ di molteplicità p del polinomio caratteristico, allora il numero di autovettori corrispondenti a λ può andare da 1 a p (a seconda della matrice).
3. Se tuttavia la matrice A è simmetrica allora, indipendentemente dal valore degli autovalori (quindi anche in caso di autovalori coincidenti) il numero di autovettori è sempre n . Inoltre gli autovettori sono a due a due ortogonali: se $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sono gli n autovettori, si ha $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ per ogni $i \neq j$.
4. Se $n = 3$ il polinomio caratteristico ha la forma

$$P_3(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

e ammette tre radici (non necessariamente reali) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Il vettore non nullo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ è un autovettore (corrispondente all'autovalore λ) se risolve il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) v_1 + a_{12} v_2 + a_{13} v_3 = 0, \\ a_{21} v_1 + (a_{22} - \lambda) v_2 + a_{23} v_3 = 0 \\ a_{31} v_1 + a_{32} v_2 + (a_{33} - \lambda) v_3 = 0. \end{cases}$$

Esempio: data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

il polinomio caratteristico è $P_3(\lambda) = -(1 - \lambda)(2 - \lambda)(2 + \lambda)$, quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -2$. L'autovettore corrispondente a $\lambda = 1$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -v_2 - 3v_3 = 0, \\ v_2 + v_3 = 0, \\ -v_3 = 0, \end{cases}$$

quindi $(v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) \implies \vec{v}_1 = (1, 0, 0)$. L'autovettore corrispondente a $\lambda = 2$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 - 3v_3 = 0, \\ v_3 = 0, \\ -4v_3 = 0, \end{cases}$$

quindi $(v_1, v_2, v_3) = (v_1, -v_1, 0) \implies \vec{v}_1 = (1, -1, 0)$. L'autovettore corrispondente a $\lambda = -2$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3v_1 - v_2 - 3v_3 = 0, \\ 4v_2 + v_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

quindi $(v_1, v_2, v_3) = (-11v_2/3, v_2, -4v_2) \implies \vec{v}_1 = (-11, 3, -12)$.

11.8 Diagonalizzazione di una matrice 2×2

Sia A una matrice 2×2 e siano λ_1, λ_2 i suoi autovalori. Valgono le seguenti proprietà.

1. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora gli autovettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ corrispondenti sono linearmente indipendenti.
2. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ possono esserci o due o un solo autovettore corrispondente a λ , a seconda della matrice.
3. Se A è simmetrica allora ammette sempre due autovettori ortogonali.

Dimostrazioni:

1. Se i due vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ fossero linearmente dipendenti allora dovrebbero essere proporzionali (cfr. l'Osservazione 2 di pag. 76), i.e. $\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. Ma se così fosse si avrebbe $A\vec{v}_2 = A\alpha\vec{v}_1 = \alpha A\vec{v}_1 = \alpha\lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_1\alpha\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_2$; d'altra parte $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$, quindi si troverebbe $\lambda_1\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$ che non è possibile se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. Consideriamo le due matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Nel primo caso ogni vettore del piano è un autovettore (si ragiona come fatto per l'Esempio 2 di pag. 107), quindi due autovettori linearmente indipendenti sono, per esempio, $\vec{v}_1 = (1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (0, 1)$. Nel secondo caso l'autovettore corrispondente all'autovalore 1 è $\vec{v} = (0, 1)$.

3. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ siano $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ e $\vec{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$ gli autovettori corrispondenti. Se A è simmetrica si verifica facilmente che $\vec{v}_1 \cdot A\vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot A\vec{v}_1$; infatti si ha

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \cdot A\vec{v}_2 &= v_{11}a_{11}v_{21} + v_{11}a_{12}v_{22} + v_{12}a_{21}v_{21} + v_{12}a_{22}v_{22}, \\ \vec{v}_2 \cdot A\vec{v}_1 &= v_{21}a_{11}v_{11} + v_{21}a_{12}v_{12} + v_{22}a_{21}v_{11} + v_{22}a_{22}v_{12},\end{aligned}$$

e si vede subito che le due espressioni sono uguali se A è simmetrica (i.e. se $a_{12} = a_{21}$). D'altra parte $\vec{v}_1 \cdot A\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ e, analogamente $\vec{v}_2 \cdot A\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \cdot \lambda_1 \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Quindi $\vec{v}_1 \cdot A\vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot A\vec{v}_1$ implica $\lambda_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, ovvero $(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$. Perciò se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ si ha $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, i.e. $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono ortogonali. D'altra parte se $\lambda_1 = \lambda_2$ allora la matrice è proporzionale all'identità (cfr. l'Osservazione 2 di pag. 106) e quindi ogni vettore è un autovettore (cfr. l'Esempio 2 di pag. 107): in particolare si possono scegliere due autovettori ortogonali.

Osservazioni:

1. La proprietà 1 vale più in generale per matrici $n \times n$; cfr. l'Osservazione 1 di pag. 108.
2. Anche la proprietà 3 vale più in generale per matrici $n \times n$ cfr. l'Osservazione 3 di pag. 108.

Sia A una matrice 2×2 con autovalori λ_1 e λ_2 . Supponiamo che esistano due autovettori distinti, i.e. due vettori linearmente indipendenti $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$ e $\vec{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$ tali che $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$ e $A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$, i.e.

$$\begin{cases} a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} = \lambda_1 v_{11}, \\ a_{21}v_{11} + a_{22}v_{12} = \lambda_1 v_{12}, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}v_{21} + a_{12}v_{22} = \lambda_2 v_{21}, \\ a_{21}v_{21} + a_{22}v_{22} = \lambda_2 v_{22}. \end{cases}$$

In tal caso $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ costituisce una base per i vettori del piano. Questo vuol dire che ogni vettore del piano si può scomporre come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, i.e. per ogni vettore $\vec{v}$ esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{v} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$. Si ha allora

$$A\vec{v} = A(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha A\vec{v}_1 + \beta A\vec{v}_2 = \alpha \lambda_1 \vec{v}_1 + \beta \lambda_2 \vec{v}_2.$$

In altre parole, lavorando nella base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, la matrice A agisce come se moltiplicasse le componenti dei vettori per dei numeri reali. Può quindi essere più conveniente lavorare nella base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ in cui la matrice A agisce come una matrice diagonale. Ci si può quindi porre il problema di come si passa dalla matrice A alla matrice diagonale i cui elementi siano gli autovalori di A .

Definiamo la matrice C le cui colonne siano costituite dai vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}.$$

Poiché i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono linearmente indipendenti non possono avere la stessa direzione. Quindi le due colonne di C non sono proporzionali e quindi il determinante di C non può essere nullo (per l'Osservazione 2 di pag. 104 questo implicherebbe appunto che le colonne di C sono proporzionali) $\implies \det C \neq 0 \implies C$ è invertibile.

Poiché i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sono linearmente indipendenti, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ costituisce una base. Se scriviamo $\vec{v}_1 = v_{11}\vec{i} + v_{12}\vec{j}$ e $\vec{v}_2 = v_{21}\vec{i} + v_{22}\vec{j}$, possiamo notare che

$$C^T = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

è la *matrice del cambiamento di base* che fa passare dalla base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ alla base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

Possiamo riscrivere le due equazioni

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$$

come un'unica equazione nella forma

$$AC = CD, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (-66)$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} & a_{11}v_{21} + a_{12}v_{22} \\ a_{21}v_{11} + a_{22}v_{12} & a_{21}v_{21} + a_{22}v_{22} \end{pmatrix}, \\ CD &= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_{11} & \lambda_2 v_{21} \\ \lambda_1 v_{12} & \lambda_2 v_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poiché la matrice C è invertibile possiamo moltiplicare a sinistra per C^{-1} la relazione $AC = CD$, così da ottenere

$$D = C^{-1}AC.$$

La matrice D è diagonale e ha come elementi diagonali gli autovalori di A . Si dice in tal caso che la matrice A è *diagonalizzabile* e che la matrice C *diagonalizza* la matrice A . Si noti che la matrice C è la trasposta della matrice del cambiamento di base che fa passare alla base degli autovettori.

Osservazioni:

1. Poiché $\det(C^{-1}AC) = \det C^{-1} \cdot \det A \cdot \det C = (1/\det C) \cdot \det A \cdot \det C = \det A$, si ha

$$\det A = \det D = \lambda_1 \lambda_2,$$

ovvero il determinante di una matrice 2×2 diagonalizzabile è uguale al prodotto degli autovalori.

2. In particolare se una matrice A è invertibile allora è non singolare, i.e. $\det A \neq 0$, e quindi i suoi autovalori devono essere entrambi diversi da zero.

11.9 Esercizi

1. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare le matrici $A + B^T$, AB e BA .

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare: (1) A^T , (2) $\det A$, (3) $A\vec{v}$, dove $\vec{v} = (1, 1)$, (4) A^{-1} , (5) $\det A^4$.

3. Dato il sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ x + 2y = 2, \end{cases}$$

riscrivere il sistema nella forma $A\vec{u} = \vec{b}$, con $\vec{u} = (x, y)$, e trovare il vettore $\vec{u}$ che risolve l'equazione.

4. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare: (1) A^{-1} , (2) gli autovalori e gli autovettori di A , (3) la matrice che diagonalizza A .

5. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare k perché si abbia

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3/2 & 5 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

calcolare tutti i possibili prodotti.

7. Dato il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ 2x + z = 0, \\ -x - 2y = 2, \end{cases}$$

trovare la soluzione (x, y, z) usando il metodo di Cramer.

8. Dato il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ x + y + z = 0, \\ x - z = 1, \end{cases}$$

(1) riscrivere il sistema nella forma $A\vec{u} = \vec{b}$ e risolverlo calcolando la matrice inversa di A ; (2) risolvere il sistema usando il metodo di Cramer.

9. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

(1) calcolare autovalori e autovettori di A ; (2) diagonalizzare A .

10. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

(1) calcolare autovalori e autovettori di A ; (2) diagonalizzare A .

11. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(1) calcolare l'inversa di A ; (2) calcolare autovalori e autovettori di A ; (3) diagonalizzare A ; (4) calcolare autovalori e autovettori di A^{-1} .

12. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) calcolare l'inversa di A ; (2) calcolare autovalori e autovettori di A ; (3) diagonalizzare A ; (4) calcolare autovalori e autovettori di A^{-1} .

13. Dato il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 1, \\ 2x - y + z = 0, \\ x + 2y + 3z = 1, \end{cases}$$

risolverlo usando il metodo di Cramer.

14. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 7x + 2y + 2z = 2, \\ 4y + 2z = 1, \end{cases}$$

e si determini la soluzione (x, y, z) sia (1) usando il metodo di Cramer che (2) attraverso il calcolo della matrice inversa.

Soluzioni:

$$1. A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2. A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \det A = 1, A\vec{v} = (2, 3), A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \det A^4 = 1.$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{u} = (4, -1).$$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, P_2(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1 = -1, & \vec{v}_1 = (1, -1), \\ \lambda_2 = 3, & \vec{v}_2 = (1, 1), \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$5. AB = \begin{pmatrix} k-3 & -k^2-1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \implies k-3 = -5, -k^2-1 = -5 \implies k = -2.$$

$$6. AB = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 5/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} 3/2 & -9 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} -9/2 & 11 \\ -3/2 & 7 \\ -5 & 14 \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det A = -5 \implies x = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$y = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -1, z = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$8. (1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -4,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (x, y, z) = (3/4, -1/2, -1/4);$$

$$(2) x = -\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3/4, y = -\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -1/2,$$

$$z = -\frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1/4.$$

$$9. (1) \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3}, & \vec{v}_1 = (1, 2 - \sqrt{3}), \\ \lambda_2 = \sqrt{3}, & \vec{v}_2 = (1, 2 + \sqrt{3}); \end{cases} (2) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} - 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$10. (1) \begin{cases} \lambda_1 = -1, & \vec{v}_1 = (1, 1), \\ \lambda_2 = -3, & \vec{v}_2 = (0, 1); \end{cases} (2) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$11. (1) A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; (2) \begin{cases} \lambda_1 = -1, & \vec{v}_1 = (0, 1), \\ \lambda_2 = 1/2, & \vec{v}_2 = (3, 2); \end{cases} (3) C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}; (4) \text{ gli autovalori e autovettori}$$

della matrice inversa sono: $\begin{cases} \lambda_1 = 2, & \vec{v}_1 = (0, 1), \\ \lambda_2 = -1, & \vec{v}_2 = (3, 2). \end{cases}$

$$12. (1) A^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; (2) \begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{3/2}, & \vec{v}_1 = (1, 4 - 2\sqrt{6}), \\ \lambda_2 = \sqrt{3/2}, & \vec{v}_2 = (1, 4 + 2\sqrt{6}); \end{cases}$$

$$(3) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 - 2\sqrt{6} & 4 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \det C = 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{6} & -1 \\ -4 + 2\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -\sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{pmatrix};$$

(4) gli autovalori e autovettori della matrice inversa sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\sqrt{2/3}, & \vec{v}_1 = (1, 4 - 2\sqrt{6}), \\ \lambda_2 = \sqrt{2/3}, & \vec{v}_2 = (1, 4 + 2\sqrt{6}). \end{cases}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5},$$

$$y = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0, z = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}.$$

$$14. (1) \text{ Scrivendo il sistema nella forma } A\vec{u} = \vec{b} \text{ si ha } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 10,$$

$$\text{quindi } x = \frac{1}{10} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{10} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5},$$

$$z = \frac{1}{10} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}.$$

$$(2) A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -14 & 2 & 12 \\ 28 & -4 & -19 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -14 & 2 & 12 \\ 28 & -4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{u} = (1/5, 1/5, 1/10).$$

Osservazioni:

1. Negli Esercizi 11 e 12 la matrice inversa A^{-1} risulta avere gli stessi autovettori di A , corrispondenti ad autovalori che sono gli inversi degli autovalori di A . Questa è una proprietà generale: (1) gli autovalori di A^{-1} sono gli inversi degli autovalori di A ; (2) se $\vec{v}$ è l'autovettore di A corrispondente all'autovalore λ , allora $\vec{v}$ è anche autovettore di A^{-1} , corrispondente all'autovalore $1/\lambda$.
2. L'affermazione precedente si dimostra verificando che se $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ allora $A^{-1}\vec{v} = (1/\lambda)\vec{v}$. Partendo dalla relazione $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ e moltiplicando a sinistra per A^{-1} otteniamo $\vec{v} = A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\lambda\vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v}$. Poiché la matrice è invertibile, si ha $\lambda \neq 0$ (cfr. l'Osservazione 2 di pag. 111), quindi si può dividere l'espressione trovata per λ , così ottenendo $(1/\lambda)\vec{v} = A^{-1}\vec{v}$.

12 Integrali

12.1 Integrali definiti

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano M e m il massimo e il minimo di f in $[a, b]$, rispettivamente (per il Teorema di Weierstrass sappiamo che esistono). Suddividiamo il

segmento $[a, b]$ in n parti nel modo seguente: fissiamo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ e poniamo $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Indichiamo con M_1 e m_1 il massimo e il minimo di f in $[x_0, x_1]$, con M_2 e m_2 il massimo e il minimo di f in $[x_1, x_2], \dots$, con M_n e m_n massimo e il minimo di f in $[x_{n-1}, x_n]$.

Definizione 12.1. *Le due somme*

$$\underline{s}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

$$\overline{s}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

si chiamano, rispettivamente, somma integrale inferiore e somma integrale superiore.

Osservazioni:

1. Se $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, la somma integrale inferiore rappresenta l'area della figura inscritta in f , mentre la somma integrale superiore rappresenta l'area della figura circoscritta a f ; cfr. Figura 36.

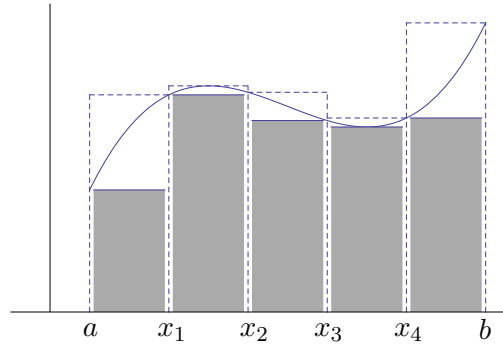


Figura 36: Somma integrale inferiore e somma integrale superiore.

2. Poiché $m_i \leq M_i$ per $i = 1, \dots, n$ si ha $\underline{s}_n \leq \overline{s}_n$, dove il segno $=$ vale se e solo se la funzione f è costante.
3. Poiché $m_i \geq m$ per $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\underline{s}_n \geq m \Delta x_1 + \dots + m \Delta x_n \geq m (\Delta x_1 + \dots + \Delta x_n) = m (b - a).$$

4. Poiché $M_i \leq M$ per $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\overline{s}_n \leq M \Delta x_1 + \dots + M \Delta x_n \leq M (\Delta x_1 + \dots + \Delta x_n) = M (b - a).$$

Definizione 12.2. Per ogni $i = 1, \dots, n$ si scelga un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. La somma

$$s_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

prende il nome di somma integrale.

Osservazioni:

1. Sia le somme integrali superiore e inferiore che la somma integrale dipendono dalla suddivisione dell'intervallo.
2. La somma integrale dipende anche dalla scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$.
3. Poiché $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ si ha $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, quindi

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

ovvero

$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \bar{s}_n.$$

4. Per n fissato il numero degli intervalli è finito, quindi possiamo considerare $\max_i \Delta x_i$. Al crescere di n il numero degli intervalli aumenta: possiamo per esempio infittire i punti in modo tale che $\max_i \Delta x_i$ divenga sempre più piccolo. Si può allora considerare il limite della somma integrale per suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ in intervalli di ampiezze Δx_i tali che $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$. Ovviamente in tale limite $n \rightarrow +\infty$.

Definizione 12.3. Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, se per ogni suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in n segmenti $[x_{i-1}, x_i]$ e per ogni scelta dei punti $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, nel limite in cui $\max_i |x_i - x_{i-1}|$ tende a 0, la somma integrale s_n tende a uno stesso limite s , allora tale limite si chiama integrale definito della funzione $f(x)$ sul segmento $[a, b]$ e si indica con

$$s = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Diremo anche che a è l'estremo inferiore e b è l'estremo superiore dell'integrale, e che $[a, b]$ è l'intervallo di integrazione.

Definizione 12.4. Se il limite s esiste la funzione f si dice integrabile in $[a, b]$.

Teorema 12.5. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile in $[a, b]$.

Osservazioni:

1. Finora abbiamo assunto $a < b$. Per consistenza si definisce

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

che permette di considerare anche i casi $a > b$ e $a = b$.

2. Se $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$ allora l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ rappresenta geometricamente l'area della regione racchiusa tra l'asse x , il grafico della funzione $f(x)$ e i due segmenti verticali che uniscono i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ai punti $(a, 0)$ e $(b, 0)$, rispettivamente; cfr. Figura 37.

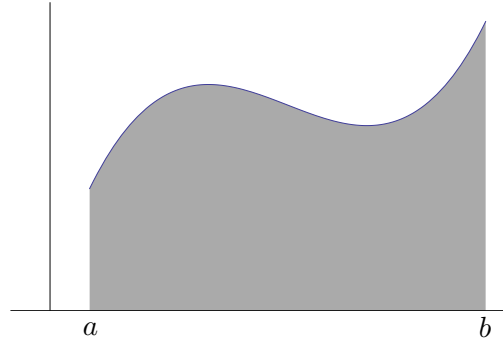


Figura 37: Interpretazione dell'integrale di una funzione positiva.

Esempi:

1. Se $f(x) = k$, con k costante, data una suddivisione qualsiasi di $[a, b]$ in intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ e scelti comunque i punti $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, si ha

$$s_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = k(b - a),$$

dove $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, quindi $\int_a^b k dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} s_n = k(b - a)$; cfr. Figura 38.

2. Se $f(x) = x$ consideriamo una suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli, tutti con la stessa ampiezza $\Delta x = (b - a)/n$: $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, ..., $x_n = a + n\Delta x = b$, e scegliamo i punti ξ_i nel modo seguente: $\xi_1 = a$, $\xi_2 = a + \Delta x$,

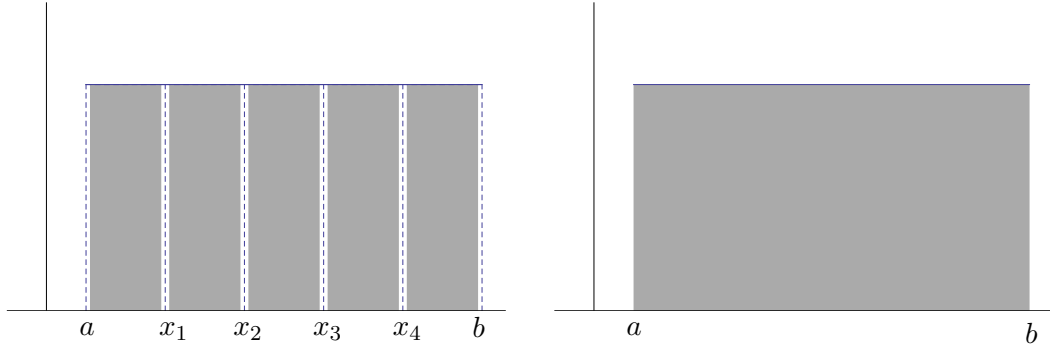


Figura 38: Somme integrali e integrale di $f(x) = k$.

$\dots, \xi_n = a + (n-1)\Delta x = b - \Delta x$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
 s_n &= \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta x + \dots + \xi_n \Delta x = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \Delta x \\
 &= (a + (a + \Delta x) + \dots + (a + (n-1)\Delta x)) \Delta x \\
 &= (na + (1 + \dots + (n-1)) \Delta x) \Delta x \\
 &= \left(na + \frac{n(n-1)}{2} \Delta x \right) \Delta x = n \Delta x a + \frac{n(n-1)}{2} (\Delta x)^2 \\
 &= (n \Delta x) a + \frac{n-1}{2n} (n \Delta x)^2 = (b-a) a + \frac{n-1}{2n} (b-a)^2,
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Poiché $\Delta x_i = \Delta x = (b-a)/n$ per ogni i , il limite di s_n per $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$ si può riscrivere come limite per $n \rightarrow \infty$, e si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
 \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} s_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((b-a) a + \frac{n-1}{2n} (b-a)^2 \right) = a(b-a) + \frac{1}{2} (b-a)^2 \\
 &= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right) = (b-a) \left(\frac{b+a}{2} \right) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).
 \end{aligned}$$

In conclusione $\int_a^b x \, dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} s_n = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$; cfr. Figura 39

12.2 Proprietà degli integrali definiti

$$1. \quad f \text{ continua in } [a, b] \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \implies \int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx.$$

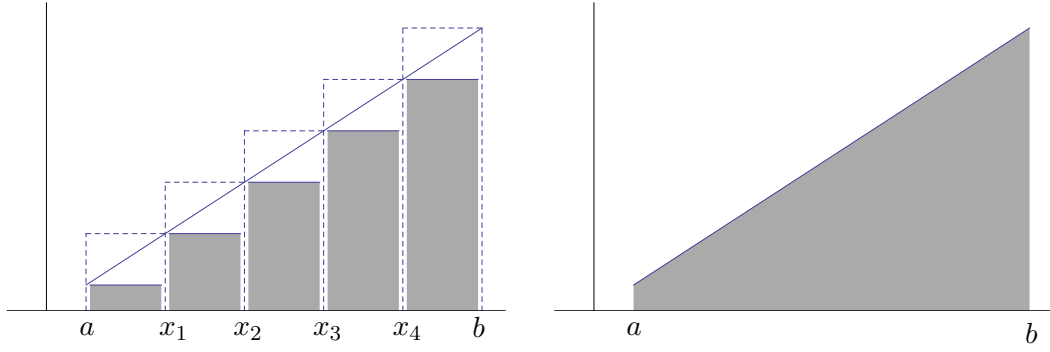


Figura 39: Somme integrali e integrale di $f(x) = x$.

2. f e g continue in $[a, b] \implies \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
3. f e g continue in $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
4. f continua in $[a, b]$ e $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$.
5. f continua in $[a, b] \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, dove m e M sono il minimo e il massimo, rispettivamente, di f in $[a, b]$.

Dimostrazioni:

1. Si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(x) dx &= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \alpha f(\xi_i) \Delta x_i \\ \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \alpha \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \alpha \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

2. Se $h(x) = f(x) + g(x)$, effettuando la stessa suddivisione in intervalli per le due funzioni e scegliendo gli stessi punti ξ_i per entrambe, si vede che la somma integrale per h è data dalla somma delle somme integrali di f e g :

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x) dx &= \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \Delta x_i \\ \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \Delta x_i &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

3. Effettuando la stessa suddivisione in intervalli e la stessa scelta dei punti ξ_i per le due funzioni f e g , si trova

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n g(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b g(x) \, dx.$$

4. Segue dalla proprietà 3 con la funzione $g(x) = 0$.

5. Segue di nuovo dalla proprietà 3 notando che $m \leq f(x) \leq M$ in $[a, b]$.

Teorema 12.6. *f continua in $[a, b] \implies \exists \xi \in (a, b)$ tale che $\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) (b - a)$.*

Dimostrazione. Per la proprietà 5 si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Poiché è continua, la funzione f assume tutti i valori compresi tra m e M (per il Teorema 6.5), quindi esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx,$$

da cui segue l'asserto. ■

Osservazione: il teorema è noto come *teorema della media*.

Teorema 12.7. *f continua in I e $a, b, c \in I \implies \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$.*

12.3 Integrali indefiniti

Definizione 12.8. *Si dice che una funzione F è una primitiva della funzione f in $[a, b]$ se F è derivabile e $F'(x) = f(x) \, \forall x \in [a, b]$.*

Esempi:

1. $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ è una primitiva di $f(x) = x$.
2. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ è una primitiva di $f(x) = x^2$.
3. $F(x) = e^x$ è una primitiva di $f(x) = e^x$.

4. $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$.

Osservazione: una funzione $f(x)$ ammette infinite primitive. Infatti se $F(x)$ è una primitiva, anche $F(x) + c$, con c costante arbitraria, è una primitiva.

Teorema 12.9. *Siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ due primitive della funzione $f(x)$ in $[a, b]$. Allora $F_1(x) - F_2(x)$ è costante.*

Dimostrazione. Poiché $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ in $[a, b]$ si ha $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ in $[a, b]$, quindi la funzione $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ ha derivata nulla in $[a, b]$. Per il Teorema 8.3 (di Lagrange) per ogni $x \in [a, b]$ esiste $\xi \in [a, x]$ tale che $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b - a)$, quindi, poiché $\varphi'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, si trova $\varphi(x) = \varphi(a) \forall x \in [a, b]$, ovvero $\varphi(x)$ è costante in $[a, b]$. ■

Definizione 12.10. *L'insieme delle primitive di una funzione $f(x)$ si chiama integrale indefinito di f e si indica con $\int f(x) dx$.*

Osservazione: quindi, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha $\int f(x) dx = F(x) + c$, dove c è una costante arbitraria.

Teorema 12.11. *f continua in $[a, b] \implies F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è una primitiva di f .*

Dimostrazione. Il rapporto incrementale della funzione F è dato da

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

dove $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$. Per il Teorema 12.6, si ha $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$, per un opportuno ξ compreso tra x e $x + \Delta x$ (ovvero $\xi \in (x, x + \Delta x)$ se $\Delta x > 0$ e $\xi \in (x + \Delta x, x)$ se $\Delta x < 0$). Quindi

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} (f(\xi)\Delta x) = f(\xi) \implies F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x),$$

dove si è usato che $\xi \rightarrow x$ per $\Delta x \rightarrow 0$ (per la continuità di f). ■

Teorema 12.12. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e sia F una sua primitiva. Allora si ha $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.*

Dimostrazione. La funzione $\int_a^x f(t) dt$ è anch'essa una primitiva di f per il Teorema 12.11. Quindi $\int_a^x f(t) dt = F(x) + c$, dove c è una costante, per il Teorema 12.9. D'altra parte $0 = \int_a^a f(t) dt = F(a) + c$, quindi $c = -F(a)$. Segue che $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. Se si pone $x = b$ si ottiene l'asserto. ■

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema fondamentale del calcolo integrale*.
2. Usualmente si scrive $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.
3. Il teorema fornisce una regola per calcolare l'integrale definito di una funzione: si deve prima trovare una qualsiasi primitiva di f e quindi si calcola la differenza tra i valori che essa assume in corrispondenza degli estremi di integrazione.

12.4 Tabella di integrali indefiniti

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ dove } \alpha \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + c.$$

$$8. \int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\sin x| + c.$$

$$9. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$10. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \text{ dove } a > 0, a \neq 1.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

$$12. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + c.$$

Osservazioni:

1. Le formule sopra seguono dalle espressioni trovate in §7.1 e §7.5 per le derivate delle funzioni elementari principali, a eccezione delle formule 7, 8, 12 e 14, che possono comunque essere verificate esplicitamente per derivazione della primitiva. In particolare l'integrale 12 si può ottenere mediante il metodo di integrazione delle funzioni razionali che sarà descritto più avanti (cfr. in particolare l'Osservazione 1 di §14.3).
2. Mentre le derivate di funzioni elementari sono sempre funzioni elementari, non è vero che ogni integrale indefinito si possa esprimere in termini di funzioni elementari. Per esempio

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \quad \text{con } 0 < k < 1,$$

rappresentano funzioni di natura nuova rispetto a quelle incontrate finora. In particolare la primitiva

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + c$$

che si annulla in $x = 0$, i.e.

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

prende il nome di *funzione degli errori di Gauss*, mentre la primitiva

$$\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx + c, \quad \text{con } 0 < k < 1,$$

che si annulla in $x = 0$, i.e.

$$\int_0^x \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt, \quad \text{con } 0 < k < 1,$$

prende il nome di *integrale ellittico* (incompleto del secondo tipo) .

13 Metodi di integrazione delle funzioni elementari

13.1 Integrazione per sostituzione

Supponiamo di voler calcolare l'integrale $\int_a^b f(x) dx$. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, i.e. $F'(x) = f(x)$, si ha

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Supponiamo anche che si abbia $x = \varphi(t)$, dove $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ è una funzione biunivoca (e quindi invertibile) di classe C^1 (e quindi derivabile). Indichiamo con $G(t)$ la funzione composta $G(t) = F(\varphi(t))$. Si ha allora $G'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, per la regola di derivazione della funzione composta. Quindi $G(t)$ è una primitiva della funzione $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$:

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(t) + c \quad \Longrightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

D'altra parte $G(\beta) = F(\varphi(\beta)) = F(b)$ e $G(\alpha) = F(\varphi(\alpha)) = F(a)$, così che possiamo concludere che

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Osservazioni:

1. Possiamo interpretare l'espressione sopra dicendo che, formalmente, $dx = \varphi'(t)dt$.
2. La discussione sopra mostra che, a livello di integrali indefiniti, si ha

$$\int f(x) dx = F(x) + c = G(t) + c = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

poiché $F(x) = F(\varphi(t)) = G(t)$, e quindi

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Una volta calcolato $G(t)$ si trova $F(x)$ esprimendo t in funzione di x attraverso la funzione inversa di φ , i.e. $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.

Esempi:

1. $\int 2x \cos x^2 dx = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin x^2 + c$ (sostituzione $t = x^2$).
2. $\int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 1)$ (sostituzione $t = x^2$).
3. $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \ln \sqrt{\frac{5}{2}}$ (sostituzione $t = 1 + x^2$).
4. $\int \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\operatorname{arctg} t}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c$
(sostituzione $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$).
5. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ (sostituzione $t = \frac{x}{a}$).
6. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c$ (sostituzione $t = \frac{x}{a}$).
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ (sostituzione $t = \frac{x}{a}$).
8. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \int \cos t dt \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$
 $= \frac{x + \sin x \cos x}{2}$ (si è usata prima la formula $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, poi si è effettuata la sostituzione $t = 2x$ per calcolare l'integrale di $\cos 2x$, infine si è usata la formula $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).
9. $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right)$
(sostituzione: prima $x = \sin \theta$, poi $\theta = \alpha/2$; si è anche tenuto conto che la funzione $\sqrt{1-x^2}$ è definita per $|x| \leq 1 \implies \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \implies \cos \theta \geq 0 \implies \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| = \cos \theta$).
10. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$
 $= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$ (sostituzione: prima $x = \sin \theta$, poi si procede come nell'Esempio precedente, usando il fatto che $\cos \theta \geq 0$ per $\theta \in [0, \pi/2]$; oppure si applica direttamente il risultato dell'Esempio precedente).
11. $\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx = \int_4^{16} \frac{1}{t} dt = \ln 16 - \ln 4 = \ln 4$ (sostituzione $t = x^2 + 2x + 1$).

$$12. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \arctg 2 - \arctg 1 \text{ (sostituzione } t=x-1).$$

$$13. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} \Rightarrow \text{(I) se } \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0 \text{ allora}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{t^2 + k^2} = \frac{1}{ak} \arctg \frac{t}{k} + c = \frac{1}{ak} \arctg \left(\frac{1}{k} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right) + c,$$

dove $k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ (sostituzione: prima $t = x + \frac{b}{2a}$, poi si usa la 5);

(II) se $\frac{4ac - b^2}{4a^2} < 0$ allora $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{t^2 - k^2} = -\frac{1}{2ak} \ln \left| \frac{x + \frac{b}{2a} + k}{x + \frac{b}{2a} - k} \right| + c,$

dove $k^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ (sostituzione: prima $t = x + \frac{b}{2a}$, poi si usa la 6).

$$14. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \Rightarrow \text{si applica la 13, caso (I), con } k = 1/2$$

$$\text{e } t = x - \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 2} = \frac{1}{2} \left(\arctg(-1) - \arctg(-3) \right).$$

$$15. \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

$$= \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx.$$

$$16. \int \frac{x}{x^2 + x - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + x - 1| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 + x - 1| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}{x + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \right| + c$$

(si è usato prima la 15 e quindi la 13, caso (II), con $k^2 = 5/4$ per calcolare il secondo integrale).

$$17. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = - \int dt = -t + c = -\sqrt{a^2 - x^2} + c \text{ (sostituzione } t = \sqrt{a^2 - x^2}).$$

$$18. \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \int dt = t + c = \sqrt{1 + x^2} + c \text{ (sostituzione } t = \sqrt{1 + x^2}).$$

Osservazioni:

1. Nell'Esempio 13 la condizione $(4ac - b^2)/4a^2 > 0$ implica che il polinomio $ax^2 + bx + c$ non ha radici reali. Al contrario la condizione $(4ac - b^2)/4a^2 < 0$ si presenta quando le radici sono reali.
2. Sempre nell'Esempio 13 il caso in cui si abbia $(4ac - b^2)/4a^2 = 0$ si riconduce al caso 1 di §13.4, con $\alpha = -2$.
3. Gli integrali di $\cos^2 x$ e di $\sqrt{1 - x^2}$, visti negli Esempi 8 e 9, si possono calcolare anche con il metodo di integrazione per parti (cfr. gli Esempi 7 e 10 di §14.2).

13.2 Integrazione per parti

Ricordiamo che, date due funzioni derivabili f e g , si ha $(fg)' = f'g + fg'$. Quindi integrando si ottiene

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx.$$

Si trova quindi

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx,$$

che è nota come *formula di integrazione per parti*.

Esempi:

1. $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c.$
2. $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$
3. $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c.$
4. $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c.$
5. $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + c.$
6. $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x \, dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int (2x + 7) \sin 2x \, dx$
 $= (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + c.$

7. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, dove
 $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{d}{dx} (-\sqrt{a^2 - x^2}) = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$
 (si è utilizzato il risultato dell'Esempio 17 di pag. 128), quindi
 $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, da cui si ottiene
 $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + x\sqrt{a^2 - x^2} \right) = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}.$
8. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} + c.$
9. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + c.$
10. $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \frac{d}{dx} (\sin x) \, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx$
 $= \cos x \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$, da cui si ottiene
 $\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \implies \int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2}.$
11. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2}.$
12. $\int \cos^4 x \, dx = \int \cos^3 x \frac{d}{dx} (\sin x) \, dx = \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$
 $= \cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \, dx - 3 \int \cos^4 x \, dx$, da cui si ottiene
 $\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \left(\cos^3 x \sin x + 3 \int \cos^2 x \, dx \right) = \frac{1}{4} \left(\cos^3 x \sin x + \frac{3}{2} (x + \sin x \cos x) \right) + c.$

13.3 Integrazione di funzioni razionali

Definizione 13.1. *Le funzioni razionali del tipo*

$$1. \quad \frac{A}{x-a}, \quad 2. \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad 3. \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad 4. \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

dove $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, e A, B, p, q sono costanti reali tali che $p^2 - 4q < 0$, prendono il nome di elementi semplici (o fratti semplici).

Osservazioni:

1. La condizione $p^2 - 4q < 0$ assicura che il polinomio $x^2 + px + q$ non ha radici reali.
2. Alla luce dei risultati visti in precedenza, è immediato calcolare le primitive degli elementi semplici. Infatti per i primi tre elementi semplici si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{x-a} dx &= A \ln |x-a| + c, \\ \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c, \\ \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c,\end{aligned}$$

dove si sono usate le formule degli esempi 13 e 15 di §13.1, mentre l'integrale dell'ultimo elemento semplice può essere discusso come segue.

3. Si ha $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} J_k + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) I_k$, dove

$$J_k = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx, \quad I_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k} dx.$$

Il primo integrale si calcola immediatamente e dà

$$J_k = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + c.$$

Il secondo, ponendo $t = x + p/2$ e $m^2 = q - p^2/4 > 0$, si riscrive

$$I_k = L_k, \quad L_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k},$$

dove, integrando per parti, si trova

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right).$$

In conclusione

$$L_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} L_{k-1},$$

che fornisce un modo iterativo di calcolare L_k , fino a ridursi a

$$L_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + c.$$

Esprimendo poi t e m in funzione di x, p, q si trova il valore di I_k .

4. Per esempio, per $k = 2$, si trova

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx \\ = \frac{Bp - 2Aq + 2Bx - Ap}{(4q - p^2)(x^2 + px + q)} + \frac{2(Ap - 2B)}{(4q - p^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{p + 2x}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + c. \end{aligned}$$

Esempi:

1. $\int \frac{4}{(x - 3)^3} dx = -\frac{2}{(x - 3)^2}.$
2. $\int \frac{2x + 3}{6x^2 + 5x + 2} dx = \frac{1}{6} \ln |6x^2 + 5x + 2| + \frac{13}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{12x + 5}{\sqrt{23}} + c.$
3. $\int \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 5} dx = \ln |x^2 + 2x + 5| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + c.$
4. $\int \frac{x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx = -\frac{x + 2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + c.$

Definizione 13.2. Una funzione razionale $P(x)/Q(x)$ si dice regolare se il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore.

Teorema 13.3. Una funzione non regolare si può sempre scrivere come somma di un polinomio e di una frazione regolare. In altre parole, se $P(x)/Q(x)$ non è regolare, allora esistono polinomi $M(x), F(x), f(x)$ tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)},$$

dove F ha grado inferiore a quello di f . Inoltre si ha $f(x) = Q(x)$.

Osservazione: Per determinare i polinomi $M(x)$ e $F(x)$ si deve effettuare la divisione tra i due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$: $M(x)$ è il quoziente e $F(x)$ è il resto della divisione.

Esempi:

1. $\frac{x^2}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1}.$
2. $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2x + 3}{x^2 - 1}.$
3. $\frac{x^4 + 5x}{x^3 + x + 1} = x + \frac{4x - x^2}{x^3 + x + 1}.$

$$4. \frac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^2 - x + 3} = x + 4 + \frac{2x - 11}{x^3 + 3x^2 + x + 1}.$$

Teorema 13.4. Sia $F(x)/f(x)$ una frazione regolare e sia $x = a$ una radice reale di molteplicità k di $f(x)$, i.e. $f(x) = (x - a)^k f_1(x)$, dove $f_1(a) \neq 0$. Allora si ha

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x - a)^{k-1} f_1(x)},$$

dove A_1 è una costante e F_1 è un polinomio di grado inferiore a quello di $(x - a)^{k-1} f_1(x)$.

Teorema 13.5. Sia $F(x)/f(x)$ una frazione regolare e sia $x = a$ una radice reale di molteplicità k di $f(x)$. Allora si ha

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x - a)^k} + \frac{A_2}{(x - a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x - a} + \frac{F_k(x)}{f_k(x)},$$

dove $A_1, A_2, \dots, A_k$ sono costanti e $F_k(x)/f_k(x)$ è una frazione regolare.

Dimostrazione. Si applica k volte di seguito il Teorema 13.4 rispetto alla radice $x = a$. ■

Teorema 13.6. Sia $F(x)/f(x)$ una frazione regolare e sia $f(x) = (x^2 + px + q)^k \varphi_1(x)$, dove $\varphi_1(x)$ non è divisibile per $x^2 + px + q$. Allora si ha

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} \varphi_1(x)},$$

dove M_1, N_1 sono costanti e $\Phi_1(x)$ è un polinomio di grado inferiore a quello di $(x^2 + px + q)^{k-1} \varphi_1(x)$.

Teorema 13.7. Sia $F(x)/f(x)$ una frazione regolare e sia $f(x) = (x^2 + px + q)^k \varphi_1(x)$, dove $\varphi_1(x)$ non è divisibile per $x^2 + px + q$. Allora si ha

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{x^2 + px + q} + \frac{\Phi_k(x)}{\varphi_k(x)},$$

dove $M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_k, N_k$ sono costanti e $\Phi_k(x)/\varphi_k(x)$ è una frazione regolare.

Dimostrazione. Si applica iterativamente il Teorema 13.6. ■

Teorema 13.8. Ogni frazione regolare si può scrivere come somma di elementi semplici.

Dimostrazione. Sia $F(x)/f(x)$ una frazione razionale. Possiamo fattorizzare $f(x)$,

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x^2 + px + q)^\mu (x^2 + sx + r)^\nu \dots$$

Allora applicando iterativamente i Teoremi 13.5 e 13.7, otteniamo che $F(x)/f(x)$ si può scrivere come

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{x^2 + px + q} \\ &+ \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + rx + s)^\nu} + \frac{P_2x + Q_2}{(x^2 + rx + s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_\nu x + Q_\nu}{x^2 + rx + s} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

dove i coefficienti $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots$ vanno determinati imponendo che le due espressioni siano uguali. ■

Osservazioni:

1. Il procedimento per determinare i coefficienti qui descritto prende il nome di *metodo dei coefficienti indeterminati*.
2. In principio il metodo dei coefficienti indeterminati permette di scomporre ogni frazione regolare in somma di elementi semplici. Ovviamente quello che può essere difficile, da un punto di vista pratico, è determinare le radici del polinomio $f(x)$ a denominatore.

Esempi:

1. $\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}.$
2. $\frac{x+3}{x(x-2)(x+2)} = -\frac{3}{4x} + \frac{1}{8(x+2)} + \frac{5}{8(x-2)}.$
3. $\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x-1)^2x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1}.$
4. $\frac{x^4 - x + 2}{x(x+2)^4} = \frac{1}{8x} - \frac{10}{(x+2)^4} + \frac{23}{2(x-2)^3} - \frac{25}{4(x+2)^2} + \frac{7}{8(x+2)}.$
5. $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1-2x}{3(x^2+2)}.$

$$6. \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{(x^2+1)}.$$

I risultati visti finora permettono di calcolare l'integrale di qualsiasi funzione regolare. Infatti, data una funzione razionale $P(x)/Q(x)$, per prima cosa applichiamo il Teorema 13.3 per scrivere $P(x)/Q(x) = M(x) + F(x)/f(x)$, con $f(x) = Q(x)$. La funzione $M(x)$ si integra facilmente essendo un polinomio. Utilizzando il Teorema 13.8 si scompone quindi $F(x)/f(x)$ in somma di elementi semplici, dei quali sappiamo calcolare l'integrale (cfr. le osservazioni dopo la Definizione 13.1).

Esempi:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \ln|x-2| + c. \\ 2. \int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c. \\ 3. \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx &= \frac{-(x+2)}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + c. \\ 4. \int \frac{x^4-x+2}{x(x+2)^4} dx &= \frac{1}{8} \ln|x| + \frac{10}{3(x+2)^3} - \frac{23}{4(x+2)^2} + \frac{25}{4(x+2)} + \frac{7}{8} \ln|x+2| + c. \\ 5. \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+2)} dx &= \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln(x^2+2) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + c. \\ 6. \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Osservazioni:

1. Se riconsideriamo l'integrale dell'Esempio 6 di pag. 127, possiamo notare che si può scomporre $1/(a^2 - x^2)$ in elementi semplici, i.e.

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right),$$

quindi si trova

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x+a} - \int \frac{1}{x-a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln|x+a| - \ln|x-a|) + c,$$

i.e.

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c,$$

in accordo con quanto già trovato.

2. In particolare l'integrale 12 di §13.4 si può ottenere in questo modo.

13.4 Esercizi

1. Calcolare $\int \frac{dx}{x(\ln x + 1)}$.
2. Calcolare $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$.
3. Calcolare $\int \left(\sqrt{x} + (x + 2)^{3/2} + \frac{1}{x^2} \right) dx$.
4. Calcolare $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$.
5. Calcolare $\int \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx$.
6. Calcolare $\int \sqrt{2^x - 1} \, dx$.
7. Calcolare $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$.
8. Calcolare $\int \arccos x (1 + \arccos x) \, dx$.
9. Calcolare $\int \frac{x - 1}{2x^3 - 4x^2 - 6x} dx$.
10. Calcolare $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.
11. Calcolare $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$.
12. Calcolare $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.
13. Calcolare $\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx$.
14. Calcolare $\int \ln^2 x \, dx$.

15. Calcolare $\int \frac{dx}{\sin x}$.
16. Calcolare $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.
17. Calcolare $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.
18. Calcolare $\int \sin(\ln x) dx$.
19. Calcolare $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.
20. Calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Soluzioni:

1. $\int \frac{dx}{x(\ln x + 1)} = \ln |\ln x + 1| + c.$
2.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} &= \int \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= \frac{1}{2} (\ln |x+1| - \ln |x+3|) + c \implies \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} (\ln |x+1| - \ln |x+3|) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 4 + \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} \int \left(\sqrt{x} + (x+2)^{3/2} + \frac{1}{x^2} \right) dx \\ = \int \sqrt{x} dx + \int (x+2)^{3/2} dx + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{2}{5} (x+2)^{5/2} - \frac{1}{x} + c. \end{aligned}$$
4.
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x dx = \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$
5.
$$\int \frac{x+2}{x^2 - 5x + 6} dx = 5 \ln |x-3| - 4 \ln |x-2| + c.$$
6. Con la sostituzione $2^x - 1 = t^2$ si ottiene $\int \sqrt{2^x - 1} dx = \frac{2}{\ln 2} \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$, dove si è usato che $x = \log_2(t^2 + 1) = \frac{1}{\ln 2} \ln(t^2 + 1) \implies dx = \frac{1}{\ln 2} \frac{2t}{t^2 + 1}$ Si ha quindi

$$\int \frac{t^2}{t^2+1} dt = \int dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt = t - \operatorname{arctg} t + c, \text{ da cui si ricava}$$

$$\int \sqrt{2^x-1} dx = \frac{2}{\ln 2} (\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x-1}) + c.$$

$$7. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \arcsin e^x + c.$$

$$8. \int \arccos x (1 + \arccos x) dx = \int \arccos x dx + \int \arccos^2 x dx, \text{ dove}$$

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c, \int \arccos^2 x dx$$

$$= x \arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + c \implies \int \arccos x (1 + \arccos x) dx$$

$$= x \arccos x (1 + \arccos x) - \sqrt{1-x^2} (1 + 2 \arccos x) - 2x + c.$$

$$9. \int \frac{x-1}{2x^3-4x^2-6x} dx = \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{12} \ln |x-3| + \frac{1}{6} \ln |x| - \frac{1}{4} \ln |x+1| + c.$$

$$10. \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} (\ln |x| - 2) \implies$$

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} (\ln |x| - 2) \Big|_1^4 = 4 (\ln 4 - 2) + 4 = 4 (\ln 4 - 1).$$

$$11. \text{ Con la sostituzione } \operatorname{tg} x = t \text{ si ottiene } \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}, \text{ dove si è}$$

usato che $x = \operatorname{arctg} t \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Si ha quindi

$$\int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{(1+t)^2} dt, \text{ dove}$$

$$\int \frac{dt}{1+t} = \ln |1+t| + c, \int \frac{t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln |1+t^2| + c, \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c, \text{ da}$$

$$\text{cui si ottiene } \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2} \ln |1+t| - \frac{1}{4} \ln |1+t^2| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c \implies$$

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \ln |1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4} \ln |1+\operatorname{tg}^2 x| + \frac{x}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \right| + x \right) + c = \frac{1}{2} (\ln |\sin x + \cos x| + x) + c.$$

$$12. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + c.$$

13. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ottiene $\int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{t^2}{2 + t} dt$, dove $\frac{t^2}{2 + t} = t - 2 + \frac{4}{2 + t} \Rightarrow \int \frac{t^2}{2 + t} dt = \int t dt - 2 \int dt + 4 \int \frac{dt}{2 + t} = \frac{t^2}{2} - 2t + 4 \ln |2 + t| + c \Rightarrow \int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} dx = x - 4\sqrt{x} + 8 \ln |2 + \sqrt{x}| + c$.
14. $\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$.
15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)} = \int \frac{dx}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}$, dove $t = x/2$.
Quindi $\int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\operatorname{tg} t \cos^2 t} = \ln |\operatorname{tg} t| + c \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\operatorname{tg}(x/2)| + c$.
16. $\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + c$.
17. Con la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$ si ottiene $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1}$, dove si è usato che $x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt$. Quindi $\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2} (\ln |t-1| - \ln |t+1|) + c \Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \ln |\sqrt{x+1} - 1| - \ln |\sqrt{x+1} + 1| + c$.
18. Con la sostituzione $x = e^t$ si trova $\int \sin(\ln x) dx = \int \sin t e^t = \frac{1}{2} (e^t \sin t - e^t \cos t) + c \Rightarrow \int \sin(\ln x) dx = \frac{1}{2} (x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)) + c$.
19. $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x)}$, dove $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$
 $\Rightarrow \int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \ln |x| - \ln |1+x| + c$.
20. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ottiene $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, dove si è usato che $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$. Quindi $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + c$.

14 Formula di Taylor

14.1 Approssimazioni di funzioni con polinomi

La formula di Taylor serve per approssimare una funzione nell'intorno di un punto. Ricordiamo il teorema di Lagrange (Teorema 8.3): se f è derivabile in un intorno di x_0 allora si ha $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ per un opportuno ξ . La formula di Taylor generalizza la formula sopra e permette di approssimare una funzione sufficientemente regolare entro la precisione che si vuole.

Sia f una funzione derivabile almeno $n + 1$ volte in un intervallo I contenente il punto x_0 . Vogliamo determinare un polinomio $P_n(x)$ di ordine n tale che il valore che esso assume in x_0 sia uguale al valore della funzione f in x_0 e, allo stesso tempo, le sue prime n derivate in x_0 siano uguali alle derivate corrispondenti della funzione f in x_0 . In formule richiediamo quindi:

$$f(x_0) = P_n(x_0), \quad f'(x_0) = P'_n(x_0), \quad f''(x_0) = P''_n(x_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Scriviamo il polinomio $P_n(x)$ nella forma

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \dots + C_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n C_k(x - x_0)^k,$$

con i coefficienti C_k da determinare in modo che le relazioni sopra siano soddisfatte. Calcolando le derivate di $P_n(x)$ si trova:

$$\begin{cases} P'_n(x) = C_1 + 2C_2(x - x_0) + 3C_3(x - x_0)^2 + \dots + nC_n(x - x_0)^{n-1}, \\ P''_n(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x - x_0) + 4 \cdot 3C_4(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot (n-1)C_n(x - x_0)^{n-2}, \\ \dots\dots\dots \\ P_n^{(n-1)}(x) = (n-1) \cdot (n-2) \dots 2C_{n-1} + n \cdot (n-1) \dots 2C_n(x - x_0), \\ P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \dots 2C_n, \end{cases}$$

così che, imponendo $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per $k = 0, \dots, n$, troviamo

$$\begin{cases} f(x_0) = P_n(x_0) = C_0, \\ f'(x_0) = P'_n(x_0) = C_1, \\ f''(x_0) = P''_n(x_0) = 2C_2 = 2!C_2, \\ f'''(x_0) = P'''_n(x_0) = 3 \cdot 2C_3 = 3!C_3, \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x_0) = P_n^{(n-1)}(x_0) = (n-1) \cdot (n-2) \dots 2C_{n-1} = (n-1)!C_{n-1}, \\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \dots 2C_n = n!C_n, \end{cases}$$

che possiamo scrivere in modo compatto come

$$C_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \dots, n.$$

In conclusione il polinomio $P_n(x)$ avrà la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k.$$

Chiamiamo $R_n(x)$ la differenza tra la funzione $f(x)$ e il polinomio $P_n(x)$,

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Possiamo quindi scrivere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + R_n(x).$$

La funzione $R_n(x)$ si chiama *resto* di ordine n .

Scriviamo

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} Q(x),$$

con $Q(x)$ da determinare. Per t compreso tra x_0 e x (i.e. $t \in (x_0, x)$ se $x > x_0$ e $t \in (x, x_0)$ se $x < x_0$) definiamo la funzione

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

Se calcoliamo la derivata di $F(t)$ rispetto a t troviamo

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) - \dots \\ &\quad + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q(x), \end{aligned}$$

che si può semplificare in

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q(x).$$

Inoltre si ha, per costruzione, $F(x_0) = F(x) = 0$: possiamo quindi applicare il Teorema 8.1 (di Rolle), per concludere che esiste ξ , compreso tra x_0 e x tale che $F'(\xi) = 0$. Per tale valore $t = \xi$ si ha quindi

$$F'(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(n+1)!} Q(x) = 0,$$

da cui si deduce $Q(x) = f^{(n+1)}(\xi)$. Quindi otteniamo la seguente espressione per il resto (nota come *forma di Lagrange per il resto*)

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

dove ξ è un opportuno valore compreso tra x_0 e x (quindi fissato x_0 è funzione di x). In conclusione possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi),$$

che è chiamata *formula di Taylor con il resto di Lagrange*. Nel caso in cui sia $x_0 = 0$ la formula è talvolta chiamata *formula di MacLaurin*.

Se approssimiamo una funzione $f(x)$, per x vicino a un valore x_0 , con un polinomio di ordine n , troviamo che l'approssimazione diventa sempre migliore all'aumentare di n . Per esempio, se $f(x) = e^x$, si ha (cfr. §14.2 più avanti):

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 + x, & P_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!}, & P_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}, \\ P_4(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}, & P_5(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}, \\ P_6(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}, \end{aligned}$$

e così via. Si vede che al crescere di n i polinomi $P_n(x)$ costituiscono, per x vicino a $x_0 = 0$, un'approssimazione sempre migliore di $f(x)$; cfr. Figura 40. Ovviamente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per x grande le funzioni e^x e $P_n(x)$ sono molto diverse. Si vede comunque dalla figura che per x piccolo (in realtà fino a $|x| \approx 3$) già il polinomio $P_6(x)$ costituisce un'ottima approssimazione di e^x .

Analogamente, se $f(x) = \sin x$, si ha (cfr. §14.3 più avanti):

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_2(x) = x, & P_3(x) &= P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}, & P_5(x) &= P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \\ P_7(x) &= P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, & P_9(x) &= P_{10}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}, \\ P_{11}(x) &= P_{12}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}, \end{aligned}$$

e così via. Se confrontiamo la funzione $\sin x$ con i polinomi di ordine dispari $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ e $P_7(x)$ si ha la situazione rappresentata in Figura 41. Di nuovo si ha un'ottima approssimazione in tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$ già a $n = 11$.

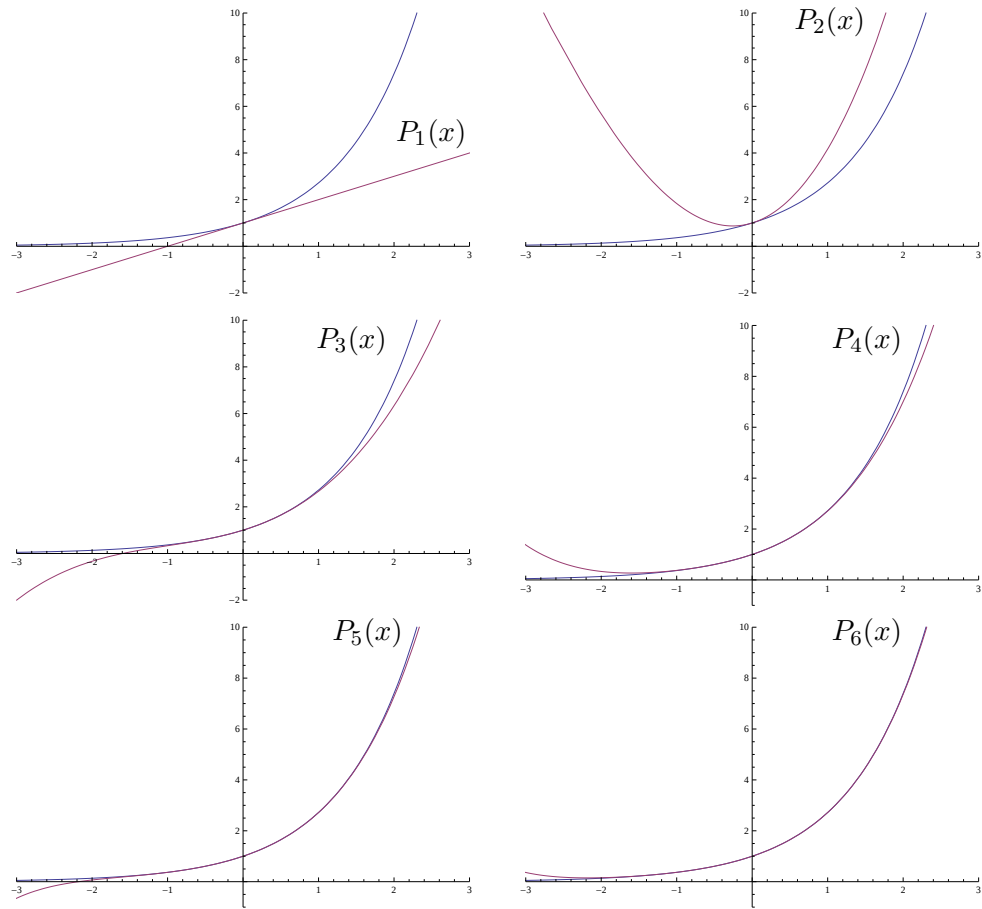


Figura 40: Confronto tra $f(x) = e^x$ e i polinomi approssimanti fino all'ordine 6.

14.2 Formula di MacLaurin per la funzione e^x

Se $f(x) = e^x$ si ha $f'(x) = e^x$. Derivando ulteriormente si vede che $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi per $x_0 = 0$ si trova la formula di MacLaurin

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x), \end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^\xi,$$

per ξ opportuno compreso tra 0 e x . Si può dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $R_n(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

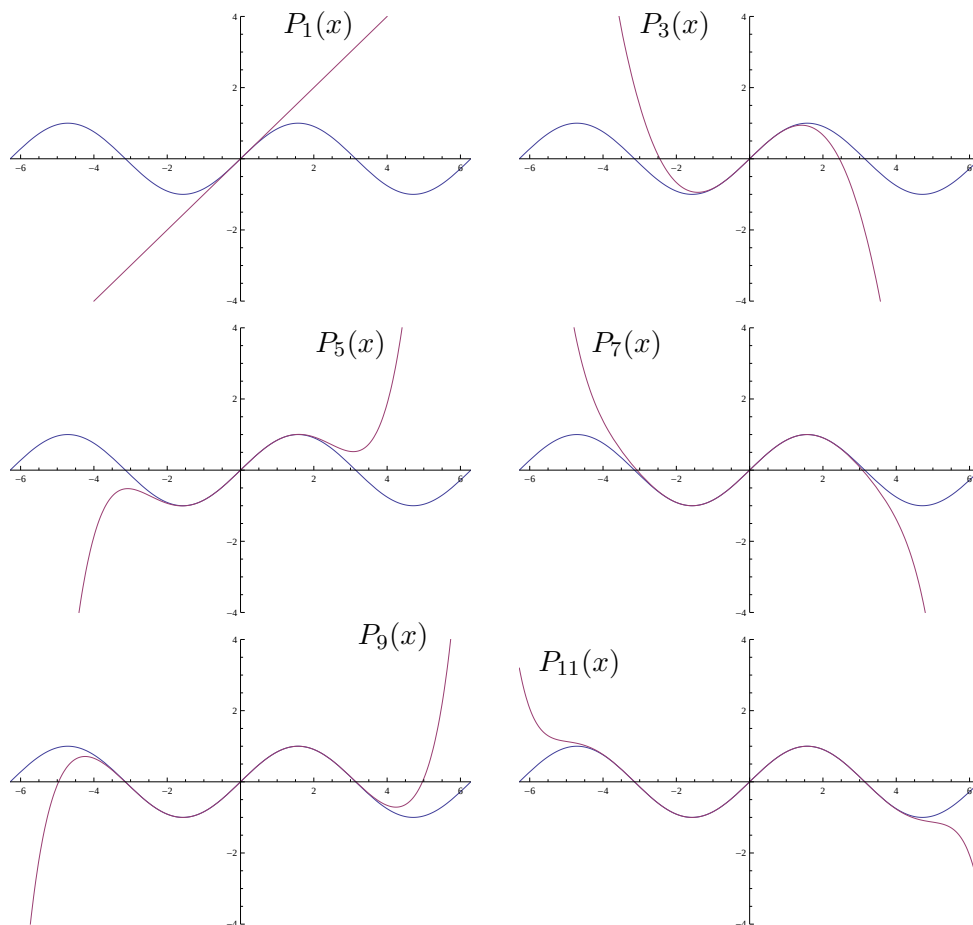


Figura 41: Confronto tra $f(x) = \sin x$ e i polinomi approssimanti fino all'ordine 11.

14.3 Formula di MacLaurin per la funzione $\sin x$

Se $f(x) = \sin x$ si ha $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$. Quindi iterando si trova $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, e così via. In particolare si vede che le derivate dispari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = \cos x$ (per $n = 1, 5, 9, 13, \dots$) e $f^{(n)}(x) = -\cos x$ (per $n = 3, 7, 11, 15, \dots$), mentre le derivate pari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = \sin x$ (per $n = 0, 4, 8, 12, \dots$) e $f^{(n)}(x) = -\sin x$ (per $n = 2, 6, 10, 14, \dots$). Calcolate in $x = x_0 = 0$ le derivate pari sono quindi tutte nulle, mentre le derivate dispari sono alternativamente uguali a 1 e -1. Per $n = 2k + 1$ possiamo quindi scrivere $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Quindi si trova la formula di MacLaurin

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x) \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_{2n+1}(x), \end{aligned}$$

dove

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \sin \xi,$$

per ξ opportuno compreso tra 0 e x . Anche in questo caso per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $R_{2n+1}(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

14.4 Formula di MacLaurin per la funzione $\cos x$

Se $f(x) = \cos x$ si ha $f'(x) = -\sin x$ e $f''(x) = -\cos x$. Quindi, ragionando analogamente a quanto fatto per $\sin x$, iterando si trova $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, e così via. In particolare si vede che le derivate prime sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = -\sin x$ (per $n = 1, 5, 9, 13, \dots$) e $f^{(n)}(x) = \sin x$ (per $n = 3, 7, 11, 15, \dots$), mentre le derivate pari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = \cos x$ (per $n = 0, 4, 8, 12, \dots$) e $f^{(n)}(x) = -\cos x$ (per $n = 2, 6, 10, 14, \dots$). Calcolate in $x = x_0 = 0$ le derivate dispari sono quindi tutte nulle, mentre le derivate pari sono alternativamente uguali a 1 e -1 . Per $n = 2k$ possiamo quindi scrivere $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$. Quindi si trova la formula di MacLaurin

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n}(x), \end{aligned}$$

dove

$$R_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \sin \xi,$$

per ξ opportuno compreso tra 0 e x . Anche in questo caso per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $R_{2n}(x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

14.5 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1-x)$

Partendo dall'identità

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

che si verifica facilmente scrivendo

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n &= \frac{(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n)}{1-x} \\ &= \frac{1+x+x^2+x^3+\dots+x^n - x-x^2-x^3-x^4-\dots-x^{n+1}}{1-x} = -\frac{x^{n+1}}{1-x}, \end{aligned}$$

si ottiene lo sviluppo di $1/(1-x)$, con un'espressione esplicita del resto:

$$\frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^n x^k + R_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + R_n(x),$$

dove

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

14.6 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1+x)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1-x)$ e sostituendo $-x$ a x si trova

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + R_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$

dove

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

14.7 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1-x^2)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1-x)$ e sostituendo x^2 a x si trova

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + R_{2n}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{2n} + R_{2n}(x),$$

dove

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2(n+1)}}{1-x}.$$

14.8 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1+x^2)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1+x)$ e sostituendo x^2 a x si trova

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + R_{2n}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{2n} + R_{2n}(x),$$

dove

$$R_{2n}(x) = (-1)^{2(n+1)} \frac{x^{2(n+1)}}{1-x}.$$

14.9 Formula di MacLaurin per la funzione $\ln(1+x)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1+x)$, sostituendo t a x e quindi integrando t tra 0 e x si trova

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^x t^k dt + \int_0^x R_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt,\end{aligned}$$

quindi si ha

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_n(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} + R_n(x),\end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt.$$

14.10 Formula di MacLaurin per la funzione $\operatorname{arctg} x$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1+x^2)$, sostituendo t a x e quindi integrando t tra 0 e x si trova

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt + \int_0^x R_n(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1-t} dt,\end{aligned}$$

quindi si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_n(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^7 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{2n+1} + R_n(x),\end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{1-t} dt.$$

14.11 Formula di MacLaurin per altre funzioni elementari

Più in generale, data una qualsiasi funzione elementare, se ne può calcolare la formula di Taylor o di MacLaurin fino all'ordine voluto applicando direttamente la formula vista alla fine di §14.1.

Esempi:

1. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$
2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots$
3. $(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 + \dots$
4. $(1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + \dots$
5. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$
6. $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$
7. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 + \dots$
8. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots$

Osservazioni:

1. A volte può essere utile applicare iterativamente le formule. Per esempio lo sviluppo di $\operatorname{tg} x$ si può anche calcolare come segue: (1) si scrive $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, (2) si calcola la formula di MacLaurin $\sin x$ e di $\cos x$, (3) poiché $\cos x = 1 + \alpha(x)$, dove

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots,$$

si scrive $1/\cos x$ utilizzando la formula di MacLaurin della funzione $1/(1+x)$, con x sostituita da $\alpha(x)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \left(1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 + \dots\right), \end{aligned}$$

da cui si ottiene la formula dell'Esempio 5.

2. In particolare si può calcolare la formula di Taylor di qualsiasi funzione composta $f(g(x))$: prima si calcola la formula di Taylor $f(y)$, con $y = g(x)$ in un intorno di $y_0 = g(x_0)$, ottenendo un polinomio in $y - y_0$, poi si scrive la formula di Taylor di y in ciascun termine del polinomio:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) (g(x) - g(x_0)) + \frac{1}{2!} f''(g(x_0)) (g(x) - g(x_0))^2 + \dots \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \left(g'(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2!} g''(x_0) (x - x_0)^2 + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} f''(g(x_0)) \left(g'(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2!} g''(x_0) (x - x_0)^2 + \dots \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Esempi:

1. $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + \dots$
2. $e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$
3. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \dots$
4. $e^{\cos x} = e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6 + \dots \right).$

14.12 Calcolo di limiti mediante la formula di Taylor

La formula di Taylor può essere utilizzata per calcolare i limiti. Risulta infatti essere un metodo molto molto efficiente per trattare le forme indeterminate, al pari dei Teoremi di de l'Hôpital visti in §8.2.

Esempi:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3} = \frac{1}{3}.$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin^2 x - \cos x - x}{2x^3} = \frac{1}{12}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\sin x - 1) + \cos x}{x^3} = \frac{1}{6}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = 1.$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x + x^2}{e^x - x - \cos x} = \frac{1}{2}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0.$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x^2} - \sqrt{1 + 2 \sin^2 x}}{x^2 \sin^2 x} = 1.$

Soluzioni:

1. Si ha $e^x - \sin x + \cos x - 2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} - 2 + \dots$, da cui segue $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3/3) + \dots}{x^3} = \frac{1}{3}.$
2. Si ha $e^x - \sin^2 x - \cos x - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} - x + \dots$, da cui si ottiene $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin^2 x - \cos x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3/6) + \dots}{2x^3} = \frac{1}{12}.$
3. Si ha

$$\begin{aligned}
 & e^x (\sin x - 1) + \cos x \\
 &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \right) \left(x - \frac{1}{6}x^3 - 1 + \dots \right) + 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \\
 &= x - \frac{x^3}{6} - 1 + x^2 - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + \dots = \frac{x^6}{6} + \dots,
 \end{aligned}$$

$$\text{da cui si ottiene } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\sin x - 1) + \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3/6) + \dots}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

4. Si ha

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \dots, \quad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + \dots,$$

da cui segue il risultato.

5. Si ha

$$e^x - e^{-x} - 2x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 2x + \dots = \frac{x^3}{3} + \dots,$$
$$x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{6} + \dots = \frac{x^3}{6} + \dots,$$

da cui segue il risultato.

6. Si ha

$$\ln(1+x) - \sin x + x^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots\right) - (x + \dots) + x^2 = \frac{x^2}{2} + \dots,$$
$$e^x - x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2} + \dots = x^2 + \dots,$$

da cui segue il risultato.

7. Scrivendo

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x},$$

si ha $x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{6} + \dots = \frac{x^3}{6} + \dots$ e $x \sin x = x^2 + \dots$, da cui segue il risultato.

8. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

9. $e^x - 1 = 1 + x - 1 + \dots = x + \dots \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

10. Si ha

$$e^{\sin x^2} = 1 + (\sin x^2) + \frac{1}{2}(\sin x^2)^2 + \dots = 1 + (x^2 + \dots) + \frac{1}{2}(x^2 + \dots)^2 + \dots$$
$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \dots,$$
$$\sqrt{1 + 2 \sin^2 x} = 1 + \frac{1}{2}(2 \sin^2 x) - \frac{1}{8}(2 \sin^2 x)^2 + \dots = 1 + (\sin x)^2 - \frac{1}{2}(\sin x)^4 + \dots$$
$$= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots,$$
$$x^2 \sin^2 x = x^4 + \dots,$$

da cui si ottiene $e^{\sin x^2} - \sqrt{1 + 2 \sin^2 x} = x^4 + \dots$ e $x^2 \sin^2 x = x^4 + \dots$, che implica il risultato.

Osservazioni:

1. I limiti 4, 5 e 6 sono già stati discussi in §8.2, applicando i Teoremi di de l'Hôpital. Analogamente il limite 7 è stato discusso in §8.3.
2. I limiti 8 e 9 sono i limiti notevoli discussi 3 e 5, visti a pag. 32 e a pag. 38, rispettivamente.

Bibliografia

- [1] Nikolaj S. Piskunov *Calcolo differenziale e integrale Vol. 1*, Editori Riuniti, Roma, 2010.
- [2] Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torini, 1988.
- [3] Jaures P. Cecconi, Guido Stampacchia, *Analisi Matematica Vol. 1*, Liguori Editore, Napoli, 1974.
- [4] S. Lang, *Algebra lineare*, Boringhieri, 1970.