

MAT1 - Matematica 1

PRIMA PROVA D'APPELLO (28-01-2014)

ESERCIZIO 1. [4] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos x - 1}.$$

ESERCIZIO 2. [4+2] Data la funzione

$$f(x) = \frac{|x|x}{1+x^2},$$

(2.1) si calcolino i limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

(2.2) si mostri che $f(x)$ è derivabile ovunque e si calcoli $f'(x)$;

(2.3) si determini un intervallo I tale che $f: \mathbb{R} \rightarrow I$ sia biunivoca.

FACOLTATIVO: si discuta la derivabilità di $f'(x)$.

ESERCIZIO 3. [4+1] Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

(3.1) si calcoli la matrice $S = A + B$;

(3.2) si calcoli la matrice $M = AB$;

(3.3) si determini quali delle quattro matrici A, B, S, M siano invertibili;

(3.4) si calcoli l'inversa di una delle matrici invertibili trovate al punto precedente.

FACOLTATIVO: si determinino gli autovalori delle matrici S e M .

ESERCIZIO 4. [4+1] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (2, 2, 1)$,

(4.1) si determini il vettore $\vec{a} = 2\vec{v} - \vec{w}$;

(4.2) si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$;

(4.3) si determini l'angolo compreso tra i due vettori;

(4.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$;

FACOLTATIVO: si discuta se i tre vettori \vec{v} , $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e \vec{a} sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 5. [4+3] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

FACOLTATIVO: si usi il risultato per calcolare $\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

ESERCIZIO 6. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = x \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}.$$

In particolare si determini il dominio della funzione, si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, convessa o concava e si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**