

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - TERZO APPELLO (15-04-2014)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{x^3}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite usando un metodo differente da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \ln(4 + x^2) - \ln(1 + x^2).$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) se ne studi la continuità, (iii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iv) si discuta dove è convessa o concava e (v) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4+1] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1, 4, 3)$ e $\vec{w} = (3, 0, 1)$,

(3.1) si determinino i vettori $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{b} = \vec{v} - \vec{w}$;

(3.2) si calcolino i prodotti scalari $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

(3.3) si determini l'angolo φ compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

(3.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.

FACOLTATIVO: si mostri che solo due dei vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \vec{b}$ sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 4. [4+1] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

(4.1) si calcolino gli autovalori di A ;

(4.2) si calcolino gli autovettori di A .

FACOLTATIVO: si calcoli il determinante di A e si discuta se A sia invertibile.

ESERCIZIO 5. [4] Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{1 + 4x^4}{1 + 2x^2} dx.$$

ESERCIZIO 6. [4+3] Data la funzione

$$f(x) = x |x - 1|,$$

(6.1) si determini per quali valori di x si ha $f(x) = 0$;

(6.2) si discuta per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione è continua;

(6.3) si discuta per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile;

(6.4) si calcoli $f'(x)$ ove possibile.

FACOLTATIVO: si discuta la disuguaglianza $f(x) > x^2(x - 1)$.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**