Corso di laurea in Scienza Geologiche - Anno Accademico 2013/2014

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - QUARTO APPELLO (25-06-2014)

<u>ESERCIZIO 1.</u> [4+3] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x+x^2)+\cos(x-x^2)-2\cos x}{x^4}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite usando un metodo differente da quello usato precedentemente.

<u>ESERCIZIO 2.</u> [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

<u>ESERCIZIO 3.</u> [4+2] Dati i due vettori nello spazio $\vec{v} = (1,1,3)$ e $\vec{w} = (4,1,3)$,
(3.1) si determino i vettori $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{b} = \vec{w} - \vec{v}$;
(3.2) si calcoli il prodotto scalare $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e si mostri che $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{w}|^2 - |\vec{v}|^2$;
(3.3) si determini l'angolo φ compreso tra i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$;
(3.4) si calcoli il prodotto vettoriale $\vec{v} \wedge \vec{w}$.
FACOLTATIVO: si verifichi che $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sono linearmente indipendenti e si trovi invece un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$ tale che i tre vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}$ siano linearmente dipendenti.

<u>ESERCIZIO 4.</u> [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

(4.1) si determini il valore di α per il quale la matrice non è invertibile;
(4.2) per il valore di α trovato al punto (4.1) si calcolino gli autovalori di A;
FACOLTATIVO: si calcoli l'autovettore associato a uno degli autovalori trovati al punto (4.2).

<u>ESERCIZIO 5.</u> [4] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}.$$

<u>ESERCIZIO 6.</u> [4] Data la funzione

$$f(x) = (x-1)^2\,|x-1|\,,$$

(6.1) si determinino i valori $f(-2)$, $f(0)$ e $f(2)$;
(6.2) si dimostri che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si calcoli per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = 0$;
(6.3) si discuta per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile e si calcoli $f'(x)$ ove possibile.

Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.