

**MAT1 - Matematica 1**

PROVA D'ESAME - QUINTO APPELLO (07-07-2014)

ESERCIZIO 1. [4+2] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x (1 - \cos x)}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite usando un metodo differente da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = x \ln^2 x.$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4+1] Dati i due vettori nello spazio  $\vec{v} = (1, 5, 2)$  e  $\vec{w} = (1, 0, 2)$ ,

(3.1) si determinino i vettori  $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$  e  $\vec{b} = \vec{v} - \vec{w}$ ;

(3.2) si calcoli il prodotto scalare  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ;

(3.3) si determini l'angolo  $\varphi$  compreso tra i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ;

(3.4) si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ .

FACOLTATIVO: si trovi per quale valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  i vettori  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e  $\alpha(\vec{v} \wedge \vec{w})$  sono linearmente dipendenti.

ESERCIZIO 4. [4+2] Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

(4.1) si calcolino le matrici  $S = A + B$  e  $M = AB$  e  $N = BA$ ;

(4.2) si calcoli  $C^5$ , dove  $C = M^T - N^T$  ( $T$  indica la matrice trasposta);

(4.3) si calcolino gli autovalori di  $A$ ;

(4.4) si calcolino gli autovalori di  $B$ .

FACOLTATIVO: si calcolino gli autovettori di  $A$  e di  $B$ .

ESERCIZIO 5. [4] Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \cos(\ln x) dx.$$

ESERCIZIO 6. [4] Data la funzione

$$f(x) = x |x^2 - 1|,$$

(6.1) si determinino i valori  $f(-2)$ ,  $f(0)$  e  $f(2)$ ;

(6.2) si discuta per quali valori di  $x$  si ha  $f(x) = 0$  e per quali valori si ha  $f(x) > 0$ ;

(6.3) si discuta per quali  $x \in \mathbb{R}$  la funzione è derivabile e si calcoli  $f'(x)$  ove possibile.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.  
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**