Esercitazione del 2 ottobre 2013

Esercizio 1. Risolvere la disequazione

$$\frac{x+2}{1-x} \leq 2$$

Svolgimento Portando tutti i termini al primo membro e determinando il minimo comune multiplo tra i denominatori si ottiene

$$\frac{x+2-2(1-x)}{1-x} \leq 0;$$

moltiplicando ambo i membri per -1, cambiando conseguentemente il verso della disuguaglianza, si ha

$$\frac{3x}{x-1} \geq 0;$$

considerando la condizione di esistenza sul denominatore, ovvero $x \neq 1$, la disequazione si studia facendo il quoziente (che segue le medesime regole del prodotto) tra il segno del numeratore e quello del denominatore. La risoluzione di disequazioni di grado superiore al secondo fattorizzate può essere effettuata tramite la regola dei segni: di ogni fattore si studia il segno, tracciando una linea continua negli intervalli in cui il fattore è positivo e una tratteggiata dove è negativo. Da tale regola, per l'esercizio in questione, si ottiene lo schema di cui alla figura 1, dove il cerchietto pieno indica che il valore considerato va incluso tra le soluzioni, il cerchietto vuoto indica che deve essere escluso. Le soluzioni della disequazione sono dunque $x \leq 0 \ \vee x > 1$.

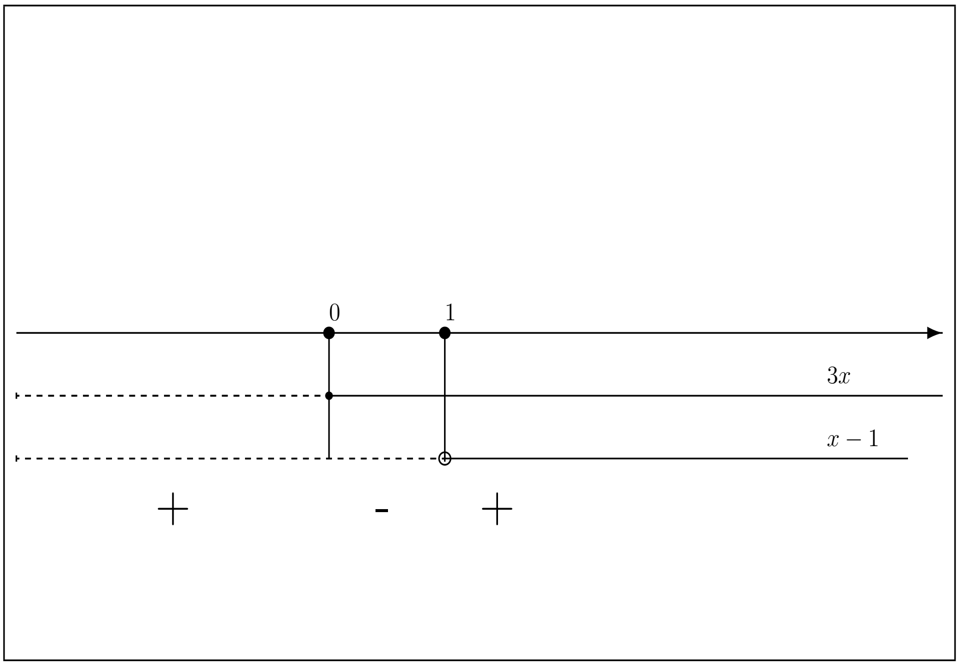

Figura 1: Regola dei segni per l'esercizio 1

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{x^2+4} \leq -x^2-1$$

Svolgimento La disequazione proposta non ammette soluzioni poiché il primo membro è sicuramente positivo, mentre il secondo è negativo.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{9 - x^2} \geq 0$$

Svolgimento Si ha $x^2 - 6x + 8 = 0$ se $x = 2$ oppure $x = 4$, mentre $9 - x^2 = 0$ per $x = \pm 3$. Il segno di $x^2 - 6x + 8$, ma anche quello di $9 - x^2$, si può determinare in due modi:

- con il prodotto dei segni considerando che $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le radici reali di $ax^2 + bx + c = 0$, eventualmente coincidenti;

- il segno di $ax^2 + bx + c$ è quello del coefficiente a per tutti e soli i valori di x esterni all'intervallo delle radici.

Si ha dunque per questa frazione lo schema di cui alla figura 2, che ne illustra il prodotto dei segni.

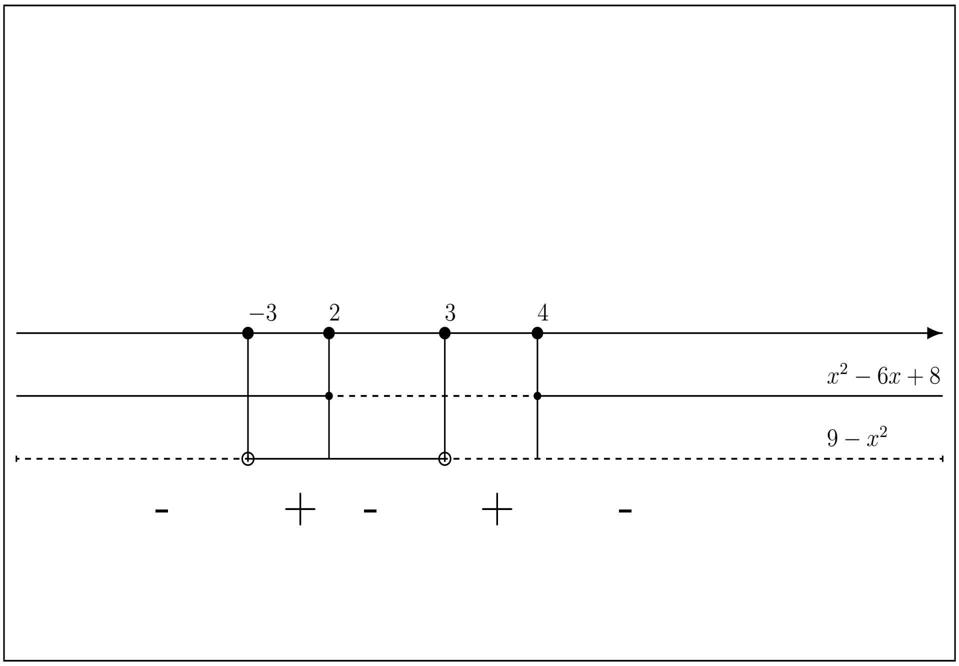

Figura 2: Regola dei segni per l'esercizio 3

Le soluzioni sono dunque $-3 < x \leq 2 \vee 3 < x \leq 4$

Esercizio 4. Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 9x - 1 < 20x^2 \\ \frac{38x - 15x^2 - 7}{4x - 1} \leq 0 \end{cases}$$

Svolgimento Si ha $38x - 15x^2 - 7 = 0$ per $x = \frac{1}{5}$ o $x = \frac{7}{3}$; $9x - 1 = 20x^2$ per $x = \frac{1}{5}$ o $x = \frac{1}{4}$. La regola dei segni per la terza disequazione del sistema fornisce lo schema di cui alla figura 3.

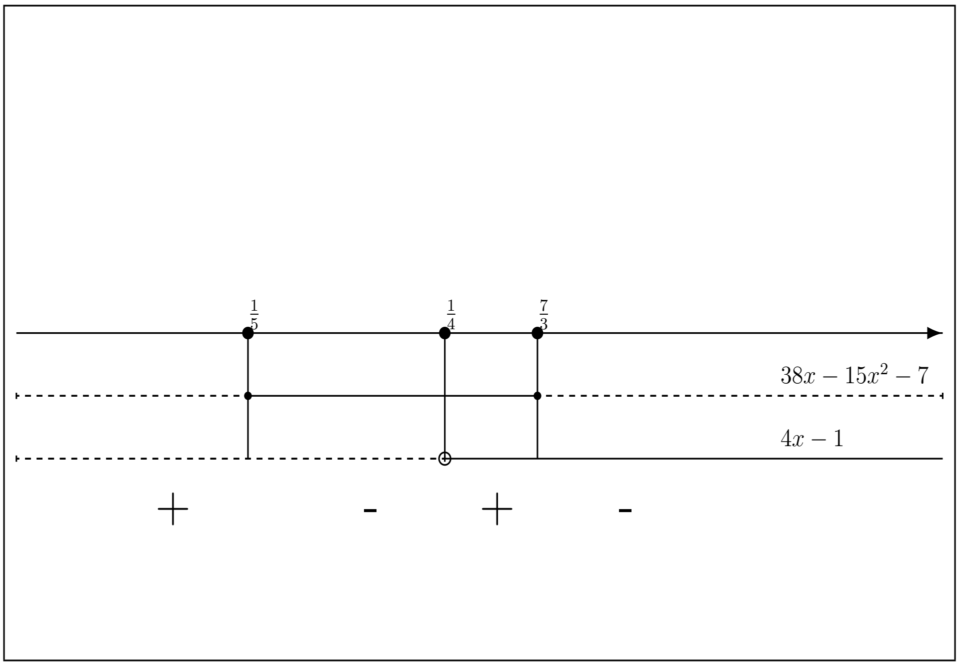

Figura 3: Regola dei segni per l'esercizio 4

Al sistema si applica quindi la regola dei sistemi, di cui al grafico 4: in ogni riga, con una linea continua, si rappresenta la zona corrispondente alle soluzioni della disequazione in esame:

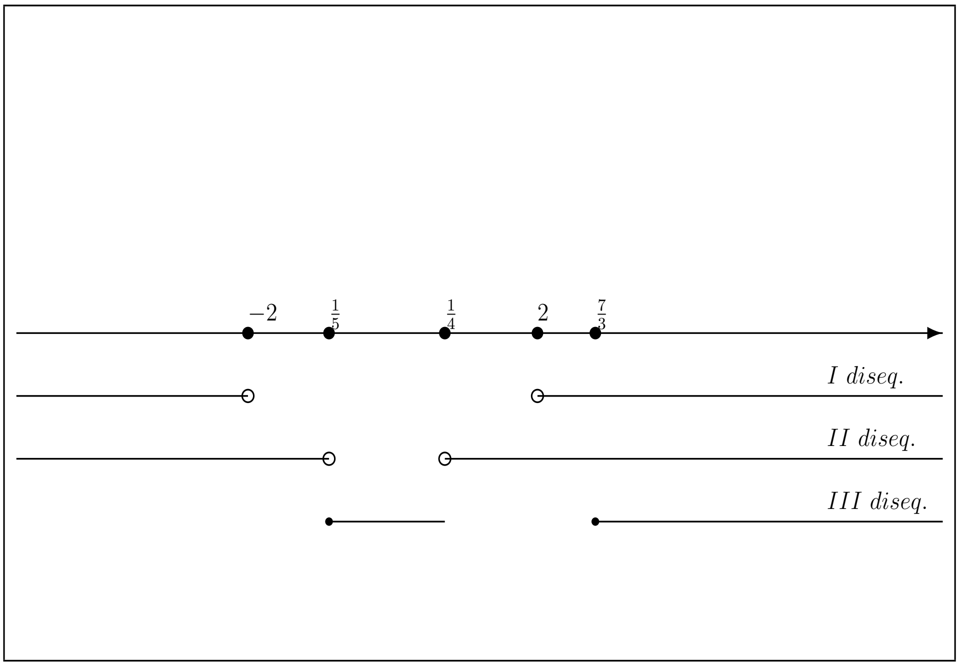

Figura 4: Regola dei sistemi per l'esercizio 4

Le soluzioni sono rappresentati dagli intervalli in cui sono presenti tante linee continue quante sono le disequazioni del sistema, ovvero, per questo esercizio, sono date dall'intervallo

$[\frac{7}{3}, +\infty)$.
Esercizio 5. Risolvere la disequazione

$$|\frac{x-1}{x-7}| > 1$$

Svolgimento Le soluzioni di tale disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-7} > 1 \\ \frac{x-1}{x-7} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{x-1}{x-7} > 1 \\ \frac{x-1}{x-7} < 0 \end{cases}$$

ovvero da

$$\begin{cases} \frac{x-1-(x-7)}{x-7} > 0 \\ \frac{x-1}{x-7} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{x-1+(x-7)}{x-7} < 0 \\ \frac{x-1}{x-7} < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono date dall'intervallo $(7, +\infty)$, mentre quelle del secondo dall'intervallo $(4, 7)$. In definitiva le soluzioni della disequazione sono date dall'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x > 4, x \neq 7\}$.
Si osservi che la disequazione $|A(x)| > k$ equivale a $A(x) < -k \vee A(x) > k$.
Esercizio 6. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{4x^2 - 1} < x - 3$$

Svolgimento La risoluzione della disequazione irrazionale

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \quad n \text{ pari}$$

equivale alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} p(x) < q^n(x) \\ p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

La disequazione dell'esercizio, dunque, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ 4x^2 - 1 < (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9; \end{cases}$$

la terza disequazione si scrive anche $3x^2+6x-10 < 0$, che ha per soluzioni le $x : -1-\sqrt{39}/3 < x < -1+\sqrt{39}/3$; la seconda disequazione ha per soluzioni le $x > 3$. Avendosi $-1+\sqrt{39}/3 < 3$, il sistema non ha soluzioni. quindi anche la disequazione data non ha soluzioni.
Esercizio 7. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{2 - x^2} > 2x - 1$$

Svolgimento Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x), \quad n \text{ pari}$$

equivale ad unire le soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq q^n(x) \end{cases}$$

La disequazione data ha per soluzioni l'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - x^2 \geq (2x-1)^2 \end{cases}$$

Essi equivalgono rispettivamente ai sistemi

$$\begin{cases} x < 1/2 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ -1/5 < x < 1. \end{cases}$$

Il primo tra questi ha soluzioni $-\sqrt{2} \leq x < 1/2$, mentre il secondo ha soluzioni $1/2 \leq x < 1$. Unendo queste due soluzioni si trova che la disequazione data ha soluzioni $-\sqrt{2} \leq x < 1$.
Esercizio 8. Risolvere l'equazione

$$\sqrt{17x - 4} = 2x - 1$$

Svolgimento La soluzione dell'equazione $\sqrt[n]{p(x)} = q(x)$, con n pari richiede di impostare il sistema misto

$$\begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq 0 \\ p(x) = q^n(x) \end{cases}$$

che, per l'esercizio in questione, diviene,

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 17x - 4 \geq 0 \\ 17x - 4 =\geq (2x-1)^2 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ 4x^2 - 21x + 5 = 0 \end{cases}$$

Delle due soluzioni dell'equazione, 5 e 1/4, solo il valore $x = 5$ è accettabile, in quanto verifica le condizioni sulla radice.