Esercitazione del 9 ottobre 2013

Esercizio 1. Risolvere la disequazione

$$|3+2x| < 4x+1$$

Svolgimento. Le soluzioni delle disequazioni $|f(x)| < a$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ sono date dalle soluzioni della doppia disequazione $-a < f(x) < a$. In tal caso si ha quindi $-4x-1 < 3+2x < 4x+1$ ovvero

$$\begin{cases} -4x-1 < 3+2x \\ 3+2x < 4x+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4 < 6x \\ 2 < 2x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > -2/3 \\ x > 1 \end{cases}$$

sistema che ha per soluzioni l'intervallo $A = (1, +\infty)$.
Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$x^2 + |x| \geq 0$$

Svolgimento. L'esercizio si può risolvere determinando le soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x \geq 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x+1) \geq 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x < 0 \\ x(x-1) \geq 0; \end{cases}$$

i due sistemi, hanno soluzioni, rispettivamente, $x \geq 0$ e $x < 0$. Quindi la soluzione della disequazione è data dall'intero asse reale. Questo risultato era facilmente intuibile, perché, qualunque sia x, sia x^2 che $|x|$ o sono nulli o sono positivi, quindi anche la loro somma ($\forall x \in \mathbb{R}$) o è nulla o è positiva.
Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{4^{3x-x^2} - 1}{2-x} \leq 0$$

Svolgimento. Il numeratore si scrive anche $4^{3x-x^2} - 4^0$; tale espressione è, ad esempio, negativa se $3x - x^2 < 0$, ovvero se $x < 0 \vee x > 3$; trattandosi, infatti, di una diseguaglianza tra due esponenziali con base $4 > 1$, la stessa diseguagianza si mantiene tra gli esponenti.
Il denominatore è, ad esempio, positivo se $2 - x > 0$ ovvero se $x < 2$.
Dal prodotto dei segni si vede che la disequazione è soddisfatta per $x \leq 0 \vee 2 < x \leq 3$ (figura 1).
Esercizio 4. (assegnato) Risolvere la disequazione

$$2^{\sqrt{1-x}} \leq 8$$

Svolgimento. Da $2^{\sqrt{1-x}} \leq 2^3$ segue, sempre perché si tratta di confroni di esponenziali con basi > 1, $\sqrt{1-x} \leq 3$, quindi

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-x \leq 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 8 \end{cases}$$

quindi, per la regola dei sistemi le soluzioni della disequazione sono le $x \in [-8, 1]$ (figura 2).

Esercizio 5. Risolvere la disequazione

$$\frac{e^{3x} - 4e^x}{e^x - 1} > 0.$$

Svolgimento. Le condizioni di esistenza (denominatore $\neq 0$) implicano che deve essere $x \neq 0$. Posto $e^x = t$, occorre risolvere la disequazione

$$\frac{t(t^2-4)}{t-1} > 0$$

che, per la regola del prodotto dei segni, ha soluzioni $t < -2 \vee 0 < t < 1 \vee t > 2$; di queste, solo le ultime due sono ammissibili, essendo $t = e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$; quindi le soluzioni sono $x < 0 \vee x > \log 2$.
Esercizio 6. Risolvere la disequazione

$$\frac{\log_a(4x-3)}{\log_a(2x-1)} > 1 \qquad 0 < a < 1.$$

Svolgimento. Per le condizioni di esistenza del logaritmo e del denominatore, deve essere

$$\begin{cases} 4x-3 > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_a(2x-1) \neq 0 \end{cases}$$

che fornisce $3/4 < x < 1, \;\; x > 1$; portando tutto al primo membro, determinando il minimo comune denominatore ed utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ha

$$\frac{\log_a\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)}{\log_a(2x-1)} > 0.$$

Lo studio del segno del numeratore e del denominatore, considerando che $a < 1$, porta a

$$\log_a\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right) > 0 \Longleftrightarrow \frac{4x-3}{2x-1} < 1 \Longleftrightarrow x < 1$$
$$\log_a(2x-1) > 0 \Longleftrightarrow 2x-1 < 1 \Longleftrightarrow x < 1.$$

Da ciò si vede che numeratore e denominatore sono sempre concordi, pertanto la disequazione è soddisfatta per ogni x appartenente all'insieme di esistenza, cioè $3/4 < x < 1, \; x > 1$.
Esercizio 7. *Svolgimento.*

Il dominio della funzione	è
$\frac{x^2}{\lvert x+4\rvert}$	$(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$
$\sqrt{3-x^2}$	$[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
$\sqrt[3]{\cos x}$	$\mathbb{R}$
$e^{\sqrt{x-1}}$	$[1, +\infty]$
$\frac{3+2x}{e^x-2}$	$(-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty)$
$\frac{\ln x}{2\ln x-1}$	$x > 0, x \neq \sqrt{e}.$

Esercizio 8. Risolvere la disequazione

$$|5-2x| > 4+x$$

Svolgimento. La disequazione $|f(x)| > a$:

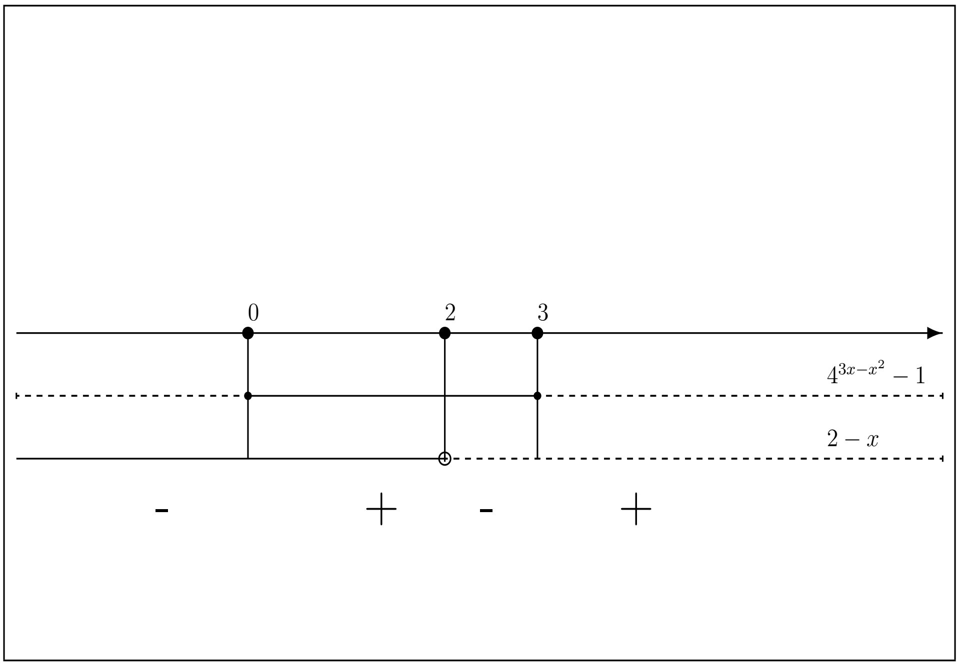

Figura 1: Regola dei segni per l'esercizio 3

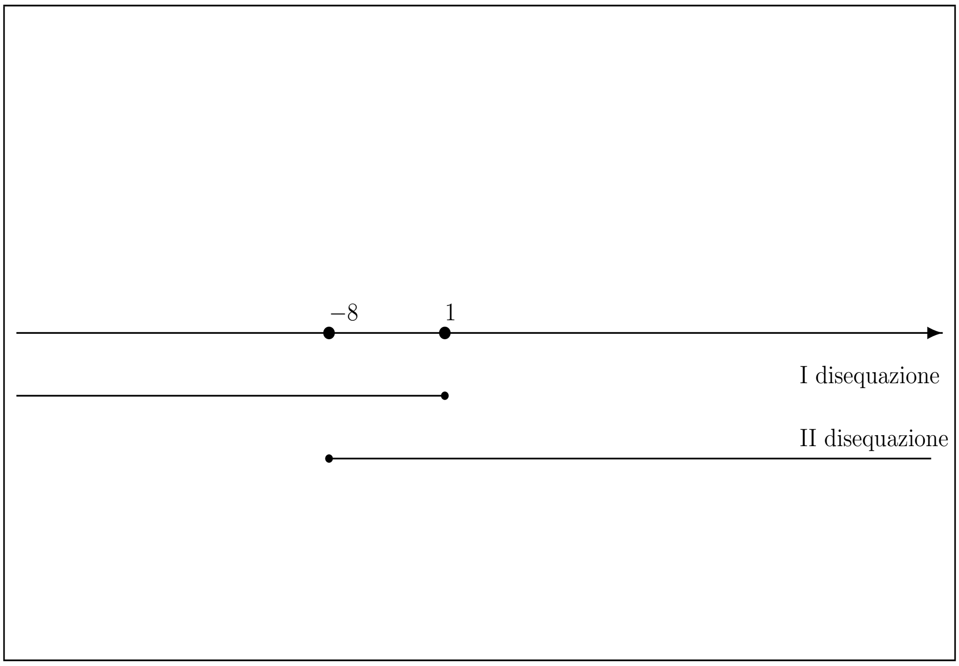

Figura 2: Regola dei sistemi per l'esercizio 4

- se $a < 0$ è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$;
- se $a = 0$, è soddisfatta $\forall x \in A = \{x : x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$;
- se $a > 0$ è soddisfatta dall'unione delle soluzioni delle due disequazioni

$$f(x) < -a \qquad\qquad f(x) > a$$

Quindi se $4 + x < 0$ la disequazione è verificata; se $4 + x \geq 0$, si ha

$$5 - 2x > 4 + x \qquad \text{e} \qquad 5 - 2x < -4 - x$$

quindi $1 > 3x$ e $9 < x$. Riunendo i risultati si ha $(-\infty, -4) \cup [-4, 1/3) \cup (9, +\infty) = (-\infty, 1/3) \cup (9, +\infty)$.