Esercitazione del 16 ottobre 2013

Esercizio 1. Risolvere la disequazione

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 < 0$$

Svolgimento. Ponendo $t = \sin x$ si ottiene la disequazione di secondo grado $2t^2 - 5t + 2 < 0$ che ha soluzioni $1/2 < t < 2$. La disequazione $\sin x < 2$ è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$ mentre la disequazione $1/2 < \sin x$ è soddisfatta per $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, essendo, in $[0, 2\pi]$, $\sin x = 1/2$ per $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5}{6}\pi$. Quindi la disequazione data ha soluzioni $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$\cos^2 x - 2\cos x - 3 < 0$$

Svolgimento. Ponendo $t = \cos x$ si ottiene la disequazione $t^2 - 2t - 3 < 0$ che ha per soluzioni $-1 < t < 3$. Le disequazioni corrispondenti sono soddisfatte da ogni $x \neq \pi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$|\cos x - 1| < \cos x$$

Svolgimento. Dato che $\cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ovvero $\cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, risulta, per la definizione della funzione modulo, $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$; quindi la disequazione data è equivalente a $1 - \cos x < \cos x$, cioè $\cos x > 1/2$; essendo $\cos x = 1/2$ per $x = -\pi/3 \vee x = \pi/3$, le soluzioni sono $-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Determinare i numeri reali dell'intervallo $[0, 2\pi]$ che soddisfano la disequazione

$$3 - 4\cos^2 x > 0$$

Svolgimento. La disequazione data si scrive $\cos^2 x - \frac{3}{4} < 0$; ponendo $t = \cos x$, tale disequazione ha soluzioni $t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ovvero $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ si ha:
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ per $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{11}{6}\pi$;
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ per $x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi$.
La disequazione data ha quindi soluzioni $x \in \big((\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi) \cup (\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi)\big)$. Le soluzioni della disequazione sono gli intervalli dell'asse reale, in $[0, 2\pi]$, in cui il grafico della funzione $\cos x$ è compreso tra le due rette $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 5. Risolvere la disequazione

$$\cos x + \sin x \tan x > 1.$$

Svolgimento. Poiché $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ per $x \neq \pi/2 + k\pi$, la disequazione data si scrive $\cos x + \sin x \frac{\sin x}{\cos x} > 1$, da cui, calcolando il denominatore comune, si ha $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} > 1$, ovvero $\frac{1}{\cos x} > 1$; tale disequazione è

$$\begin{cases} \text{impossibile,} & \text{se } \cos x \leq 0, \text{ cioè per } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \\ \text{sempre verificata,} & \text{se } \cos x > 0, \text{ cioè per } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2}\pi + 2k\pi, \quad x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

Esercizio 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2} \arcsin \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x}}{x-2}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\arcsin[\frac{0}{0}]$; risulta, però,

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x})}{(x-2)} &= \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x})}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x})} \\ &= \frac{2+x-6+x}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x})} = 2\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x})}\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 2} \arcsin \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{6-x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \arcsin \frac{2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x})} = \arcsin \frac{2}{2+2} = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 7. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{x^2}$$

Svolgimento. Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$; si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin^2 x - 3\cos x + 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} + 3\frac{1-\cos x}{x^2}\right).$$

Poiché $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, si conclude che il limite assegnato è pari a $-1+\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 8. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $[\infty^0]$; si ha

$$x^{1/x} = e^{(\log x)/x};$$

eseguendo la sostituzione $y = (\log x)/x$ ed usando i due limiti notevoli

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0, \qquad b>0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}, \qquad a>0$$

si trova che il limite dato vale 1.

Esercizio 9. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} 2^x - x^2$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $[\infty - \infty]$; si ha

$$2^x - x^2 = 2^x\left(1-\frac{x^2}{2^x}\right)$$

ottenendo una forma del tipo $\infty \cdot 1$, in base al limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0, \qquad a > 1 \text{ e } b > 0.$$

Il limite dato vale, quindi, $+\infty$.

Esercizio 10. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$$

Svolgimento. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}} = e$$

in base al limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$