Esercitazione del 23 ottobre 2013

Esercizio 1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{1/x}-1}{2^{3/x}-1}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; ponendo $\frac{1}{x}=y$ si ha che $x\to+\infty$ corrisponde a $y\to 0$ e quindi
$$\lim_{y\to 0} \frac{2^y-1}{2^{3y}-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2^y-1}{y}}{3\frac{2^{3y}-1}{3y}} = \frac{\log 2}{3\log 2} = \frac{1}{3}$$
considerando che $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$.

Esercizio 2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 3x}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; risulta
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 9x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1-\cos x)}{x^2}(1+\cos x+\cos^2 x)}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 9} = \frac{\frac{1}{2}(1+1+1)}{1^2\cdot 9} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{1}{6}$$
poiché $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ e $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} (x)^{\frac{1}{\log x}}.$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata 0^0; si ha $x^{1/\log x} = e^{(1/\log x)\log x} = e$. Il limite richiesto vale, quindi, e.

Esercizio 4. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{[e^{(x^2-9)}-1]^4}.$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; risulta
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{[e^{(x^2-9)}-1]^4} = \lim_{x\to 3^+} \left[\frac{(x-3)}{e^{(x^2-9)}-1}\right]^4 = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-9)^4}{(e^{(x^2-9)}-1)^4}\frac{(x-3)^4}{(x^2-9)^4}$$
$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)^4}{(x-3)^4(x+3)^4} = \frac{1}{1296}.$$

Esercizio 5. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{x+2x^4+\frac{1}{2}x^2}.$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; risulta
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{x+2x^4+\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} \frac{3\sqrt[3]{x}}{x(1+2x^3+\frac{1}{2}x)} = \lim_{x\to 0^+} 1\cdot 3\cdot x^{-2/3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Esercizio 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 3^+}\left[\lg(\sqrt{5x^2-9}-2x)-\lg(x^2-9)\right]$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\infty-\infty$ e quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+}\lg\frac{\sqrt{5x^2-9}-2x}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3^+}\lg\frac{(\sqrt{5x^2-9}-2x)(\sqrt{5x^2-9}+2x)}{(x^2-9)(\sqrt{5x^2-9}+2x)}\\
&= \lg\lim_{x\to 3^+}\frac{5x^2-9-4x^2}{(x^2-9)(\sqrt{5x^2-9}+2x)}\\
&= \lg\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{5x^2-9}+2x}=\lg\frac{1}{\sqrt{45-9}+6}=\lg\frac{1}{12}=-\lg 12.
\end{aligned}$$

Esercizio 7. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}(\log x-\sqrt{x})$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\infty-\infty$; risulta

$$\lim_{x\to+\infty}(\log x-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}-1\right)=+\infty$$

in base al limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^b}=0, \quad b>0.$

Esercizio 8. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2+1)}{2^x}$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}\frac{x^2+1}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}][\frac{x^2}{2^x}+\frac{1}{2^x}]=0\cdot 0\cdot 0=0$$

in base ai limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^b}=0,\quad b>0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0,\quad b>0,\quad a>1.$$

Esercizio 9. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-e^{2x}}$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{-(e^{2x}-1)}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{-e^{2x}}{x}+\frac{1}{x}}=0$$

in base al limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}, \quad b>0, \quad a>1.$

Esercizio 10. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+1)}{2^x}$$

Svolgimento. Risulta
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+1)}{2^x}=\frac{0}{1}=0.$$

Esercizio 11. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}}$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{2x}{1-e^{2x}}=-\frac{1}{2}$$

in base al limite notevole
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Esercizio 12.

La derivata di	è	ricordando che
$f(x)=e^x\cos x$	$f'(x)=(\cos x-\sin x)e^x$	$(F(x)G(x))'=F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$
$f(x)=e^{2x^3+5x}$	$f'(x)=(6x^2+5)e^{2x^3+5x}$	$(e^{G(x)})'=G'(x)e^{G(x)}$
$f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$	$f'(x)=\frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$	$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)'=\frac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}$
$f(x)=x^n\log x$	$f'(x)=x^{n-1}(n\log x+1)$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\log a}$
$f(x)=5^{x^3+x+1}$	$f'(x)=(3x^2+1)5^{x^3+x+1}\log 5$	$(a^{G(x)})'=a^{G(x)}g'(x)\log a$
$f(x)=9^{\arctan x}$	$f'(x)=9^{\arctan x}\log 9/(1+x^2)$	$(a^{G(x)})'=a^{G(x)}g'(x)\log a$
$f(x)=3^{\sin x}$	$f'(x)=\log 3\cos x 3^{\sin x}$	$(a^{G(x)})'=a^{G(x)}g'(x)\log a$
$f(x)=\log(\sin x)$	$f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$	$(F(G(x)))'=G'(x)F'(G(x))$
$f(x)=\sin(\log x)$	$f'(x)=\frac{\cos(\log x)}{x}$	$(F(G(x)))'=G'(x)F'(G(x))$