Esercitazione del 30 ottobre 2013

Nel seguito con il simbolo $A \stackrel{H}{=} B$ si intenderà il passaggio da $A$ a $B$ usando il teorema di L'Hôpital.

**Esercizio 1.** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\cos x}$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; risulta
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin^2 x} = 0.$$

**Esercizio 2.** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}}$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; risulta
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

**Esercizio 3.** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}).$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $\infty \cdot 0$; si ha
$$\lim_{x\to+\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1.$$

**Esercizio 4.** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}[\log(\sin x^2) - \log(1-\cos x)].$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $\infty - \infty$; il limite dato risulta essere pari a
$$\lim_{x\to 0} \log\frac{\sin x^2}{1-\cos x} = \log\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x} \stackrel{H}{=} \log\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{\sin x} = \log(2\cdot 1\cdot 1) = \log 2.$$

**Esercizio 5.** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}.$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $1^\infty$; risulta
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{(\tan x)(\log\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{\sin x\frac{\log\sin x}{\cos x}} = e^0 = 1$$

per l'esercizio 1.

**Esercizio 6.** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 + 1 - \cos x}{x^2}.$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2+1-\cos x}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2+\sin x}{2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x^2-4x^2\sin x^2+\cos x}{2}=\frac{3}{2}.$$

**Esercizio 7.** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x+e^{3x}}$$

*Svolgimento.* Si ha la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x+e^{3x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+3e^{3x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{9e^{3x}}$$

**Esercizio 8.** Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+x-2}.$$

*Svolgimento.*

1. La funzione, essendo un quoziente di polinomi, è definita se $x^2+x-2\neq 0$, ovvero $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq -2$ e $x\neq 1$.

2. La funzione non è pari, ovvero $f(x)\neq f(-x)$; essa non è neanche dispari, ovvero $f(-x)\neq -f(x)$.

3. La funzione è t.c. $f(x)=0$ sse $x=0$, ovvero il grafico di $f$ interseca gli assi cartesiani solo nell'origine.

4. La funzione è positiva nell'intervallo $((-2,0)\cup(1,+\infty))$, negativa altrove.

5. Poiché risulta:

   * $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$
   * $\lim_{x\to-2^\pm}f(x)=\frac{-8}{0^\pm}=\pm\infty$
   * $\lim_{x\to 1^\pm}f(x)=\frac{1}{0^\pm}=\pm\infty$

   si concluse che le rette $x=-2$ e $x=1$ sono asintoti verticali per il grafico.

6. Per il primo limite del punto precedente si può affermare che la funzione non ammete asintoti orizzontali; per gli asintoti obliqui si considerino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3+x^2-2x}=1 \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+2x}{x^2+x-2}=-1 \tag{2}$$

   la retta $y=x-1$ è l'asintoto obliquo della funzione.

7. Risulta

$$f'(x)=\frac{x^4+2x^3-6x^2}{(x^2+x-2)^2}$$

   La derivata prima si annulla in $x=0$ e $x=-1\pm\sqrt{7}$; dallo studio del segno di $f'$ segue che la funzione è crescente per $x\leq -1-\sqrt{7}$ e per $x\geq -1+\sqrt{7}$, mentre è decrescente nell'intervallo $(-1-\sqrt{7},-1+\sqrt{7})$, per $x\neq -2$ e $x\neq 1$.

8. In tutti i punti del campo di esistenza $f$ è derivabile.

9. $$f''(x) = \frac{6x(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 + x - 2)^3}.$$

   Dallo studio del segno di $f''$, si deduce che $f$ è convessa in $(-2, 0]$ e in $[1, +\infty)$, concava negli altri intervalli. Il punto $x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale, dato che in esso si annulla anche la derivata prima.

Segue in figura il grafico della funzione, in verde l'asintoto obliquo.

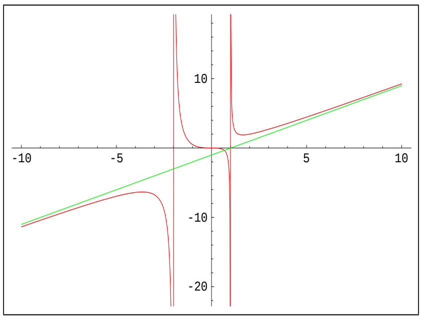


Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 8.