Esercitazione del 13 novembre 2013

Esercizio 1. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}.$$

Svolgimento.

1. Risulta $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$; dunque $f(x)$ è definita nell'insieme in cui $\frac{x-1}{x} \geq 0$, ovvero nell'intervallo $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

2. Nei punti in cui è definita, una funzione radice quadrata è sempre positiva, tranne nei punti che annullano il radicando e che la rendono nulla; quindi

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{per } x < 0 \vee x > 1 \\ f(x) = 0, & \text{se e solo se } x = 1. \end{cases}$$

3. Risulta:

   * $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^3}} = +\infty$ e da ciò si deduce che non esistono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$;
   * $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale;

4. Poiché la funzione non ammete asintoti orizzontali, possono esistere asintoti obliqui, per i quali si considerino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^3}} = \pm 1 \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x = \infty - \infty = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} + x} = 0; \tag{2}$$

   quindi:
   la retta $y = x$ è l'asintoto obliquo per $x \longrightarrow +\infty$;
   la retta $y = -x$ è l'asintoto obliquo per $x \longrightarrow -\infty$.
   A tal proposito si ricordi che

$$a\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{a^2x}, & \text{se } a \geq 0 \ , \\ -\sqrt{a^2x}, & \text{se } a < 0 \ . \end{cases}$$

5. Risulta

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}(2x + \frac{1}{x^2})$$

   La derivata prima si annulla in $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; dallo studio del segno di f' segue che la funzione è crescente per $x \in (-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0) \cup (1, +\infty)$, mentre è decrescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$; i punti $x = 1$ e $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ sono punti di minimo relativo.

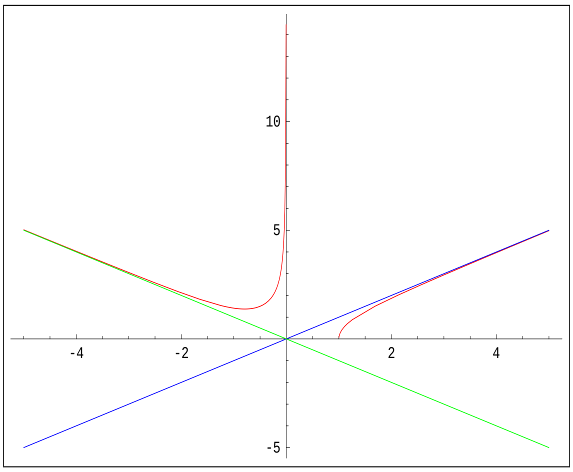

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 1.

6. La derivata prima non è definita per $x = 1$; poiché $\lim_{x\to 1^+} = +\infty$, segue che nel punto $x = 1$ il grafico di f ha tangente destra verticale.

In figura 1 il grafico della funzione; in blu e in verde i due asintoti obliqui.
Esercizio 2. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x-1}{x}} .$$

Svolgimento.

1. La funzione è definita $\forall x \neq 0$, quindi in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. La funzione non è né pari né dispari.

3. Risulta
$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x > 1 \ , \\ < 0 & \text{se } x < 1 \ , \\ = 0 & \text{se } x = 1 \ . \end{cases}$$

4. Risulta

   * $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\, e^1 = \pm\infty$ e da ciò si deduce che non esistono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$;
   * $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -e^{\frac{-1}{0^-}} = -e^{+\infty} = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -e^{\frac{-1}{0^+}} = -e^{-\infty} = 0$ e da ciò si deduce che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per $x \to 0^-$.

5. Poiché la funzione non ammete asintoti orizzontali, possono esistere asintoti obliqui, per i quali si considerino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x}e^{\frac{x-1}{x}}=e \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to\pm\infty}(x-1)e^{\frac{x-1}{x}}-ex=\infty-\infty\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}e[x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-e^{-\frac{1}{x}}]=\lim_{x\to\pm\infty}e\left[-\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{-\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right]=-2e\end{aligned} \tag{4}$$

quindi la retta $y=ex-2e$ è l'asintoto obliquo per $x\longrightarrow\pm\infty$.

6. Si ha $f'(x)=\left[1+\frac{x-1}{x^2}\right]e^{\frac{x-1}{x}}$; la funzione è allora crescente per $x^2+x-1\geq 0$, ovvero per $x\leq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $x\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Il punto $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo, mentre il punto $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di munimo.

Segue in figura 2 il grafico della funzione; in blu l' asintoto obliquo; in figura 3 un particolare del grafico.

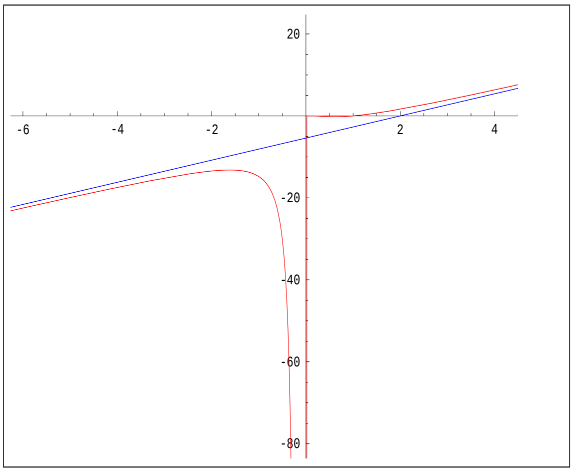

Figura 2: Grafico della funzione dell'esercizio 2.

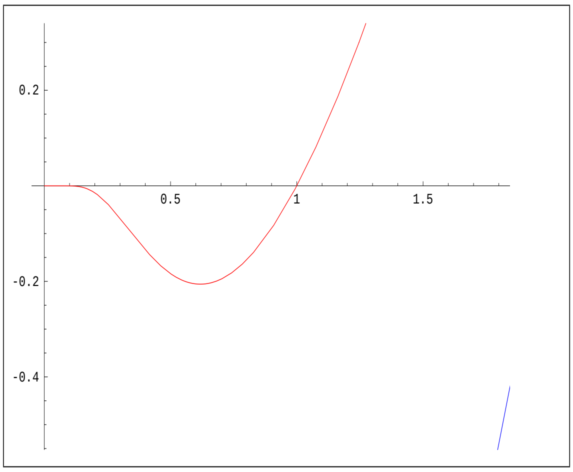

Figura 3: Particolare del grafico della funzione dell'esercizio 2.