Esercitazione del 20 novembre 2013

Esercizio 1. Determinare se il vettore $v = (3, 9, -4, -2)$ è una combinazione lineare dei vettori $u = (1, -2, 0, 3)$, $v = (2, 3, 0, 1)$ e $w = (2, -1, 2, 1)$.
Svolgimento. Si ha $(3, 9, -4, -2) = \alpha(1, -2, 0, 3) + \beta(2, 3, 0, -1) + \gamma(2, -1, 2, 1)$ se è verificato il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 3 \\ -2\alpha + 3\beta - \gamma = 9 \\ 2\gamma = -4 \\ 3\alpha - \beta + \gamma = -2 \end{cases}$$

che ha soluzioni$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, -2)$, quindi $(3, 9, -4, -2) = (1, -2, 0, 3) + 3(2, 3, 0, -1) - 2(2, -1, 2, 1)$.

Esercizio 2. Scrivere il vettore $v = (1, -2, 5)$ come combinazione lineare dei vettori $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ e $w = (2, -1, 1)$.
Svolgimento. Si ha $(1, -2, 5) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 3) + \gamma(2, -1, 1)$ se è verificato il seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$$

che ha soluzioni$(\alpha, \beta, \gamma) = (-6, 3, 2)$, quindi $(1, -2, 5) = -6(1, 1, 1) + 3(1, 2, 3) + 2(2, -1, 1)$.

Esercizio 3. Per quale valore del parametro reale k il vettore $u = (1, -2, k)$ è combinazione lineare lineare dei vettori $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?
Svolgimento. Si ha $(1, -2, k) = \alpha(3, 0, -2) + \beta(2, -1, -5)$ se è verificato il seguente sistema

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 1 \\ -\beta = -2 \\ -2\alpha - 5\beta = k \end{cases}$$

che ha soluzioni$(\alpha, \beta) = (-1, 2)$ e dall'ultima equaziuone si ha $k = -8$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$ siano dati i vettori

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Determinare:

a) le componenti del versore di $\mathbf{v}_1$ e del versore di $\mathbf{v}_2$;

b) l'angolo tra i due vettori.

Svolgimento.

a) La lunghezza, o modulo, di $\mathbf{v}_1$ è data da $\sqrt{5}$, quindi il versore richiesto è $\mathbf{u}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$; la lunghezza, o modulo, di $\mathbf{v}_2$ è data da $\sqrt{10}$, quindi il versore richiesto è $\mathbf{u}_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. $\mathbf{v}_2$.

b) Dalla definizione di prodotto saclare di due vettori

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2| \cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}$$

da cui

$$\cos \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi $\widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} = \frac{\pi}{4}$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathcal{V}^2$ sia dato il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ Determinare:

a) le componenti di vettori di modulo 2 paralleli a $\mathbf{v}$;

b) le componenti del versore perpendicolare a $\mathbf{v}$ e formante un angolo acuto con il vettore $u = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Svolgimento.

a) I vettori paralleli a $\mathbf{v}$ hanno componenti $(h, -2h)$; quelli di modulo 2 sono tali che $\sqrt{5h^2} = 2$ da cui $h = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. I vettori richiesti sono quindi $(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}})$ e $(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}})$.

b) Ricordando che $\mathbf{w} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$; tutti i vettori $\mathbf{w}$ perpendicolari a $\mathbf{v}$ hanno componenti (x, y) tali che $x - 2y = 0$; se $|w| = 1$ allora deve essere $x^2 + y^2 = 1$ e l'angolo $\widehat{\mathbf{wu}}$ è acuto se e solo se $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{w}||\mathbf{u}| \cos \widehat{\mathbf{wu}} > 0$. Si hanno i due versori

$$\mathbf{w}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \qquad \mathbf{w}_2 = (\frac{-2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

perpendicolari a $\mathbf{v}$; essendo $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{5}} > 0$, il versore richiesto è $\mathbf{w}_1$.

Esercizio 6. Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ sul vettore $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$.
Svolgimento. Il vettore $\mathbf{w}$ proiezione ortogonale di $\mathbf{v}_2$ su $\mathbf{v}_1$ è, per definizione, il vettore $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1|^2}\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Esercizio 7. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ esse sono invertibili e tali che $\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) = (-17)(18) = -306$ (th. Binet).

Esercizio 8. Scrivere le equazioni parametriche e l'equazione cartesiana della retta passante per i punti

a) $A = (-2, 1)$ e $B = (3, -5)$;

b) $A = (5, -1)$ e $B = (5, 7)$.

Svolgimento.

a) Si ha l'equazione della retta in forma di rapporti uguali

$$\frac{x + 2}{3 + 2} = \frac{y - 1}{-5 - 1}$$

ovvero $6x + 5y + 7 = 0$; le equazioni parametriche della stessa retta sono

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 6t \end{cases}$$

b) La retta ha equazione cartesiana $x = 5$ e equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = t \end{cases}$$

Esercizio 9. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P = (3, -2)$ e parallela a ciascuna delle rette

a)

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

b) $2x + 3y + 2 = 0$;

c) $x = 2$.

Svolgimento.

a) La retta richiesta ha la stessa direzione della retta data e quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + u \\ y = -2 - u \end{cases};$$

b) La retta richiesta ha equazione $2(x - 3) + 3(y + 2) = 0$ ovvero $2x + 3y - 12 = 0$.

c) La retta richiesta ha equazione $x = 3$.