Esercitazione del 27 novembre 2013

Esercizio 1. Determinare la matrice A sapendo che vale l'uguaglianza $(A^{-1} - 3I)^t = 2\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Svolgimento. Si ha

$$\left[(A^{-1} - 3I)\right]^t = \left[2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right]^t$$

da cui

$$A^{-1} - 3I = 2\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Quindi $A^{-1} = 3I + 2\left(\begin{smallmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 11 \end{smallmatrix}\right)$ da cui

$$A = (A^{-1})^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}\right]^{-1} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Determinare A se

$$\frac{1}{5}\left(4A - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 2A.$$

Svolgimento. Risulta

$4A - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 5\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 2A\right)$ ovvero $4A - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} - 10A$ da cui $14A - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix}$;

infine

$$14A = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Quindi $A = \frac{1}{14}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 23 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{23}{14} \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 3. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

non è invertibile se e solo se $\det A = 0$, ovvero se e solo se $2 - 4k = 0$; dunque A non ammette inversa per $k = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, calcolare $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$; determinare, inoltre, le componenti dei versori perpendicolari ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Svolgimento. Si ha

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, -2)$$

che, per definizione, è perpendicolare ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$; i versori perpendicolari a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono $\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1, -3, -2)$ e $\mathbf{w}'' = -\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, 2)$.

Esercizio 5. Determinare se i vettori $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, -5, 1)$ sono complanari.
Svolgimento. Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

quindi i tre vettori sono complanari.

Esercizio 6. Il segmanto di estremi $P_1 = (3, 2)$ e $P_2 = (-1, 0)$ è $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4, 2)$ ed è parallelo al segmento $\overrightarrow{P_1'P_2'} = (2, 1)$ di estremi $P_1' = (0, 0)$ e $P_2' = (2, 1)$, in quanto $\overrightarrow{P_1P_2} = -2\overrightarrow{P_1'P_2'}$.

Esercizio 7. Decomporre il vettore $v = (1, -3)$ in due vettori paralleli, rispettivamente, alle rette $t : x - 3y + 1 = 0$ e $s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$
Svolgimento. I parametri direttori della retta $ax + by + c = 0$ sono $(l, m) = (-b, a)$, mentre i parametri direttori della retta $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$ sono l ed m; quindi i parametri direttori di t sono $l = 3$ e $m = 1$; dunque se $(1, -3) = a(3, 1) + b(1, -1)$, si ha $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{5}{2}$. I due vettori cercati sono quindi $-\frac{1}{2}(3, 1)$ e $\frac{5}{2}(1, -1)$.

Esercizio 8. Dati i punti $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (1, -2)$, determinare le coordinate (h, k) di un punto P tale che P_1, P_2 e P siano i vertici di un triangolo equilatero.
Svolgimento. Deve essere $\sqrt{(h-2)^2 + (k-3)^2} = \sqrt{(h-1)^2 + (k+2)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3+2)^2}$, da cui, eguagliando primo e secondo termine e primo e ultimo termine, si ha

$$\begin{cases} h + 5k - 4 = 0 \\ h^2 + k^2 - 4h - 6k - 13 = 0 \end{cases}$$

da cui $2k^2 - 2k - 1 = 0$, quindi $k = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ e $h = \frac{3 \mp 5\sqrt{3}}{2}$. Si hanno, quindi, due punti P che soddisfano il problema.

Esercizio 9. La retta per i punti $(1, 2)$ e $(2, 4)$ ha equazione $y = 2x$ ed è parallela alla retta $y = k^2x + k$ se $k = \pm\sqrt{2}$.

Esercizio 10. Determinare l'equazione cartesiana del piano p parallelo al piano $\pi : x - 2y + z = 0$ e passante per il punto $(2, 1, 3)$.
Svolgimento. Il piano parallelo al piano $\pi : x - 2y + z = 0$ ha equazione $p : x - 2y + z + k = 0$; esso passa per il punto $(2, 1, 3)$ se $k = -3$.

Esercizio 11. Determinare le equazioni della retta r passante per il punto $A = (1, -2, 3)$ e parallela alla retta

a) $r' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = 2t \end{cases}$

b) $s : \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Svolgimento.

a) Si ha $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b) La retta $t : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ ha parametri direttori proporzionali ai minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ottenuti sopprimendo la prima, seconda, terza colonna e presi coi segni alternati. Poiché i parametri direttori di s sono $l = 3$, $m = -5$, $n = 1$, la retta r ha equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - 5t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Esercizio 12. Determinare le equazioni della retta r passante per il punto $P = (2, -3, 1)$ e perpendicolare al piano $\pi : 3x - 2y + z - 1 = 0$.
Svolgimento. Una retta di parametri direttori l, m, n e il piano $ax + by + cz + d = 0$ sono perpendicoolari se $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$; questa condizione, insieme al passaggio per P, porta a

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

ovvero a $r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}.$