Esercitazione del 4 dicembre 2013

Esercizio 1. Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare

a)

$$\int x \sin x \; dx$$

b)

$$\int x e^x \; dx$$

Svolgimento.

a) Assumendo x come fattore finito e $\sin x$ come fattore differenziale, si ha

$$\int x \sin x \; dx = \int x D(-\cos x) \; dx = -x \cos x - \int 1(-\cos x) \; dx$$
$$= -x \cos x + \int \cos x \; dx = -x \cos x + \sin x + c$$

b) Assumendo x come fattore finito e e^x come fattore differenziale, si ha

$$\int x e^x \; dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c$$

Esercizio 2. Utilizzando il metodo di integrazione per parti, calcolare

a)

$$\int x^2 \sin x \; dx$$

b)

$$\int x^2 e^x \; dx$$

c)

$$\int x^2 \log x \; dx$$

Svolgimento.

a) Assumendo x^2 come fattore finito, si ha

$$\int x^2 \sin x \; dx = \int x^2 D(-\cos x) \; dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \; dx;$$

integrando ancora per parti, con x come fattore finito, si ha

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \; dx = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + c.$$

b) Assumendo x^2 come fattore finito, si ha

$$\int x^2 e^x \; dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \; dx.$$

Scegliendo, nell'integrale a secondo membro, x come fattore finito, si ha

$$\int x^2 e^x \; dx = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x \; dx \right] = (x^2 - 2x + 2) e^x + c.$$

c) Si ha

$$\int x^2 \log x \; dx = \int \log x D \left(\frac{x^3}{3} \right) \; dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \int \frac{x^2}{3} \; dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{9} + c$$

Esercizio 3. Risulta che

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; dx = \int \sin x D(-\cos x) \; dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 \; dx \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \; dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \; dx - \int \sin^2 x \; dx \end{aligned}$$

da cui

$$\int \sin^2 x \; dx = (x - \sin x \cos x)/2 + c$$

Si ha anche

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \; dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \; dx &= \frac{1}{2} \left(\int \; dx - \int \cos(2x) \; dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right) + c = (x - \sin x \cos x)/2 + c \end{aligned}$$

Esercizio 4. Risulta che

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \; dx = \int \cos x \cos^2 x \; dx &= \int \cos x (1 - \sin^2 x) \; dx \\ &= \int \cos x \; dx - \int \cos x \sin^2 x \; dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Volendo calcolare

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \; dx \qquad a > 0$$

si effettui la sostituzione $x = a \sin t$ da cui $dx = a \cos t \; dt$ e quindi

$$I = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} (a \cos t) \; dt = a^2 \int \cos^2 t \; dt = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + c$$

Volendo riscrivere l'ultimo membro in funzione di x, si ha che da $x = a\sin t$ segue che $t = \arcsin(x/a)$ e quindi

$$I = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin(x/a) + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + c = \frac{a^2}{2}\arcsin(x/a) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Esercizio 6. Volendo calcolare

$$I = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$$

si effettui la sostituzione $x = t^2$ da cui $t = \sqrt{x}$, $dx = 2t\ dt$ e quindi

$$I = \int \frac{\sin t}{t} 2t\ dt = 2\int \sin t\ dt = -2\cos t + c = -2\cos\sqrt{x} + c.$$

Esercizio 7. Per calcolare

$$I = \int x^5 e^{x^2}\ dx$$

si effettui la sostituzione $x^2 = t$ da cui $2x\ dx = dt$ e quindi

$$I = \int \frac{t^2}{2} e^t\ dt = (t^2 - 2t + 2)e^t + c$$

ovvero

$$\int x^5 e^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^2 + 2)e^{x^2} + c$$

Esercizio 8. Per il calcolo dell'integrale

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}\ dx$$

si effettui la sostituzione $x = t^2$ da cui $t = \sqrt{x}\ dx = 2t\ dt$ e quindi

$$\begin{aligned} I = \int \frac{t}{2+t} 2t\ dt &= 2\int \frac{t^2}{2+t}\ dt \\ &= 2\int \frac{t^2 - 4}{2+t}\ dt + 8\int \frac{1}{2+t}\ dt \\ &= 2\int (t-2)\ dt + 8\int \frac{1}{2+t}\ dt = t^2 - 4t + 8\log|2+t| + c \end{aligned}$$

da cui

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\ dx = x - 4\sqrt{x} + 8\log(2 + \sqrt{x}) + c$$

Esercizio 9. Volendo calcolare

$$I = \int \sqrt{2^x - 1}\ dx$$

si effettui la sostituzione $2^x - 1 = t^2$, ovvero $x = \log_2(1+t^2)$, da cui $dx = \frac{2t}{(t^2+1)\log 2} dt$ e quindi

$$I = \frac{2}{\log 2}\int \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2}\ dt = \frac{2}{\log 2}\left(\int dt - \int \frac{1}{1+t^2}\ dt =\right) = \frac{2}{\log 2}(t - \arctan t) + c$$

da cui, ponendo $t = \sqrt{2^x - 1}$, si ha

$$\int \sqrt{2^x - 1}\ dx = \frac{2}{\log 2}\left(\sqrt{2^x - 1} - \arctan\sqrt{2^x - 1}\right) + c$$

Esercizio 10. Per calcolare

$$I = \int \frac{1}{1+e^x}\ dx$$

si può porre $e^x = t$, oppure, più rapidamente, si ha

$$\int \frac{1}{1+e^x}\ dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\ dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx = x - \log(1+e^x) + c$$