Esercitazione del 11 dicembre 2013

Esercizio 1. Data
$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{(2t - t^2)e^t}{\pi - 2\arctan t}\ dt$$
calcolare $F'(x)$.

Svolgimento. Per il Teorema di Torricelli, se $F(x) = \int_{x_0}^{\alpha(x)} f(t)\ dt$, con $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, allora $F'(x) = \alpha'(x)f(\alpha(x))$; dunque risulta
$$F'(x) = 2x\frac{(2x^2 - x^4)e^{x^2}}{\pi - 2\arctan x^2} = 2x^3(2 - x^2)\frac{e^{x^2}}{\pi - 2\arctan x^2}$$

Esercizio 2. Calcolare
$$\int \frac{x^3 + 4}{x - 1}\ dx$$

Svolgimento. Si ha
$$\int \frac{x^3 + 4}{x - 1}\ dx = \int (x^2 + x + 1 + \frac{5}{x - 1})\ dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 5\log|x - 1| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3. Calcolare
$$\int \frac{1}{x(2 - x)}\ dx$$

Svolgimento. Si cercano A e B in modo che risulti
$$\frac{A}{x} + \frac{B}{2 - x} = \frac{1}{x(2 - x)}$$
ossia
$$A(2 - x) + Bx = (-A + B)x + 2A = 1$$
Deve dunque essere
$$\begin{cases} -A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$
e quindi $A = B = 1/2$ ottenendo così
$$\int \frac{1}{x(2 - x)}\ dx = \int \frac{dx}{2x} + \int \frac{dx}{2(2 - x)} = \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}\log|2 - x| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4. Calcolare una primitiva della funzione
$$\int \frac{x + 2}{(2x - 3)}\ dx$$

Svolgimento. Risulta
$$\frac{x + 2}{2x - 3} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{2x - 3}\right)$$
quindi
$$\int \frac{x + 2}{2x - 3)}\ dx = \int \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \frac{7}{2x - 3}\ dx\right) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\log|2x - 3|$$

Esercizio 5. Calcolare una primitiva della funzione

$$\int \frac{x+3}{(2x+1)^2}\ dx$$

Svolgimento. Risulta

$$\frac{x+3}{(2x+1)^2} = \frac{A}{(2x+1)^2} + \frac{B}{2x+1}$$

da cui

$$x+3 = A + 2Bx + B = 2Bx + A + B$$

Perché valga tale identità, occorre che sia

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 2B=1 \end{cases} \to \begin{cases} A=5/2 \\ B=1/2 \end{cases}$$

Risulta dunque

$$\int \frac{x+2}{(2x+1)^2}\ dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x+1} = -\frac{5}{4(2x+1)} + \frac{1}{4}\log|2x+1|$$

Esercizio 6. Calcolare una primitiva della funzione

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\ dx$$

Svolgimento. Si osservi che il denominatore ha radici complesse; risulta

$$\frac{x-1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}$$

e

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = 4\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]$$

Si ottiene quindi

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\ dx - \int \frac{2}{x^2+2x+5}\ dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5) - \arctan\frac{x+1}{2}$$

Esercizio 7. Calcolare una primitiva della funzione

$$x\sqrt{x^2+1}$$

Svolgimento. Risulta

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$$

dato che $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$. Oppure, ponendo $\sqrt{x^2+1} = t$, si ha

$$x^2+1 = t^2 \to 2xdx = 2tdt$$

da cui

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$$

Esercizio 8. Calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{e^x}{(e^x+3)^3}$$

Svolgimento. Dato che $\frac{d}{dx}(e^x+3) = e^x$ si ha

$$\int \frac{e^x}{(e^x+3)^3}\,dx = \int e^x(e^x+3)^{-3}\,dx = \frac{(e^x+3)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(e^x+3)^2}$$

oppure, ponendo $e^x+3=t$ si ha $e^x\,dx = dt$ e dunque

$$\int \frac{e^x}{(e^x+3)^3}\,dx = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2(e^x+3)^2}$$

Esercizio 9. Calcolare

$$\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$$

Svolgimento. Si ha

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

quindi

$$1 = A(x+3) + B(x^2+3x) + Cx^2 = (B+C)x^2 + (A+3B)x + 3A$$

da cui

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{9} \qquad C = \frac{1}{9}$$

e dunque

$$\int \frac{dx}{x^2(x+3)} = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{9}\log|x| + \frac{1}{9}\log|x+3| + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio 10. Calcolare

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$$

Svolgimento. Si ha

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

da cui

$$1 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + 2A$$

e quindi i valori

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = 0$$

Quindi

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{4}\log(x^2+2) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Esercizio 11. Calcolare

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Svolgimento. I) Applicando il metodo d'integrazione per scomposizione si ottiene

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\,dx = \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

II) Applicando il metodo di integrazione per sostituzione ($\sqrt{x+1} = t$), si ha

$$x = t^2 - 1 \to dx = 2t\ dt$$

e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int (t^2-1)\ dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

III) Applicando il metodo di integrazione per parti, con fattore differenziale $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3} + h \qquad h \in \mathbb{R}$$

che si vede coincidere con il risultato ottenuto dai due precedenti metodi.