

Esercizio 1. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$$

Svolgimento. Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $+\infty - (+\infty)$; si utilizza, per il suo calcolo, la formula di Taylor della funzione $\sin x$ con centro $x_0 = 0$, ovvero

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3/6 + o(x^4)}{x^3 - x^5/6 + o(x^6)} \quad (1)$$

avendo utilizzato il fatto che $x^2 \cdot o(x^4) = o(x^6)$. Dividendo numeratore e denominatore dell'ultimo membro della (1) per x^3 e considerando che

$$\begin{aligned} \frac{o(x^4)}{x^3} &= x \cdot \frac{o(x^4)}{x^4} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \frac{o(x^6)}{x^3} &= x^3 \cdot \frac{o(x^6)}{x^6} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si ottiene il limite equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/6 + o(x^4)/x^3}{1 - x^2/6 + o(x^6)/x^3} = -\frac{1}{6}$$

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x^3} + \frac{\sin 3x}{3x^4} \right)$$

Svolgimento. Ponendo $3x$ al posto di x nello sviluppo della funzione $\sin x$ e utilizzando la proprietà $c \cdot o(x^n) = o(cx^n) = o(x^n)$ con c costante non nulla, si ha

$$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4).$$

Utilizzando anche lo sviluppo della funzione coseno, il limite dato diviene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x^3} + \frac{\sin 3x}{3x^4} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 3x \cos x + \sin 3x}{3x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 3x(1 - x^2/2 + o(x^3)) + 3x - (9/2)x^3 + o(x^4)}{3x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - (3/2)x^3 - (9/2)x^3 + o(x^4)}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{3x^4} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2} \right)$$

Svolgimento.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2} \right) = [+\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - x \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} \right)$$

in modo da poter utilizzare lo sviluppo di MacLaurin relativo alla funzione $f(x) = (1+x)^a$ per $x \rightarrow 0$ applicandolo a $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)^{1/3}$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - x \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 1 - x \left(1 + \frac{2}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{2}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\log(1 + e^x) - x]$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\log(1 + e^x) - x] &= +\infty(+\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\{ \log\left[e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] - x \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[x + \log\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) - x \right] \end{aligned}$$

In tal modo si può utilizzare lo sviluppo di MacLaurin relativo alla funzione $f(x) = \log(1+x)$ per $x \rightarrow 0$ applicandolo a $f(x) = \log(1 + \frac{1}{e^x})$. Dunque, così facendo, il limite dato è pari a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{e^x} + o\left(\frac{1}{e^x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + o\left(\frac{x}{e^x}\right) \right) = 0$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{-x} - 1}{xe^x}$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{-x} - 1}{xe^x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + (1 - x + x^2/2 + o(x^2)) - 1}{x(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x(1 + o(1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/2 + o(x^2)/x}{1 + o(1)} = \lim_{x \rightarrow 0} x/2 = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 6. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \log(1 + 2x)}{\log^2(1 + x)}$$

Svolgimento. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \log(1 + 2x)}{\log^2(1 + x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - (2x - 2x^2 + o(x^2))}{(x + o(x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2$$

Esercizio 7. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

Svolgimento. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2/2 + o(x^2) - 1 - x}{x(1 + x + o(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 8. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x \sin(x^3)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \frac{7}{12}$$

Infatti, per $x \rightarrow 0$, si ha

$$e^{x^2} + 2 \cos x - 3 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) + 2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - 3 \sim \frac{7}{12} x^4$$

e

$$x \sin x \sim x^4$$