Esercitazione del 14 gennaio 2014

Esercizio 1. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = e^{x-|x^2-x-2|}.$$

Svolgimento.

1. La funzione risulta definita, positiva e continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Si ha
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+2x+2} & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \ , \\ e^{x^2-2} & \text{se } x \in [-1, 2]. \end{cases}$$

3. Risulta:
   * $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+2x+2} = 0$, dunque la retta $y = 0$ è un asintoro orizzontale;
   * Non esistono asintoti verticali, nè obliqui.

4. Si ha
$$f'(x) = \begin{cases} (-2x+2)e^{-x^2+2x+2} & \text{se } x < -1 \vee x > 2 \ , \\ 2xe^{x^2-2} & \text{se } x \in [-1, 2] \ ; \end{cases}$$
risulta
$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x \in ((-\infty, -1) \cup (0, 2)), \\ < 0, & \text{se } x \in ((-1, 0) \cup (2, +\infty)). \end{cases}$$

5. La funzione non è derivabile per $x = -1$, $x = 2$; infatti risulta
$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1} (-2x+2)e^{-x^2+2x+2} = \frac{4}{e} \neq \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1} 2xe^{x^2-2} = \frac{-2}{e} \quad (1)$$
$$\lim_{x\to2^+} f'(x) = \lim_{x\to2} (-2x+2)e^{-x^2+2x+2} = -2e^2 \neq \lim_{x\to2^-} f'(x) = \lim_{x\to2} 2xe^{x^2-2} = 4e^2 \quad (2)$$

6. Risulta $f'(0) = 0$ e $x = 0$ è un punto di minimo relativo, mentre i punti $x = -1$ e $x = 2$ risultano di massimo relativo.

7. La derivata seconda, dove è definita, è positiva.

8. La funzione non ha punti di flesso

In figura 1 il grafico della funzione.
Esercizio 2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

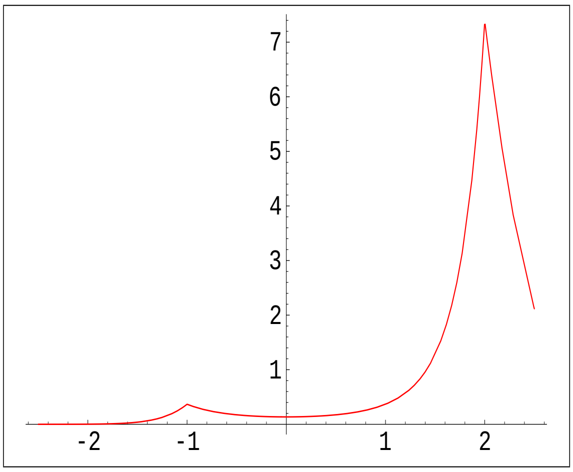

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 3. La retta passante per il punto $P = (a, b)$ e di parametri direttori (l, m) ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a + tl \\ y = b + tm \end{cases}, \qquad t \text{ parametro}$$

Dunque, la retta passante per il punto $P = (4, -3)$ e parallela al vettore $v = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2t - 3 \end{cases}, \qquad t \text{ parametro}$$

Esercizio 4.

- Una retta di equazione cartesiana $ax+by+c = 0$ ha parametri direttori $(l, m) = (-b, a)$. Dunque, la retta s passante per il punto $P = (2, 1)$ e parallela alla retta r di equazione cartesiana $r : 2x - y - 1 = 0$ ha equazioni parametriche $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ e equazione cartesiana $s : 2x - y - 3 = 0$

- Due rette, t e r di parametri direttori, rispettivamente, (l_t, m_t) e (l_r, m_r) sono perpendicolari se $l_t l_r + m_t m_r = 0$. Dunque la retta, t passante per il punto $P = (2, 1)$ e perpendicolare alla retta $r : 2x - y - 1 = 0$ ha parametri direttori (l_t, m_t) tali che $l_t + 2m_t = 0$; quindi $(l_t, m_t) = (2, -1)$ e risulta $t : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ ovvero $t : x + 2y - 4 = 0$.

Esercizio 5. Determinare il valore del parametro reale t in modo che i vettori $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ siano ortogonali.
Svolgimento. Deve essere, per la condizione di ortogonalità di due vettori, $3 \cdot 6 - 4 \cdot t + (-2) \cdot (-3) = 0$ da cui segue $t = 6$.

Esercizio 6. Calcolare

$$\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}\, dx$$

Svolgimento. Applicando la formula di integrazione per parti, scegliendo come fattore differenziale $g(x) = \frac{1}{x^2}$, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}\ln(x+2) + \int \frac{1}{x(x+2)}\\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2})\,dx\\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + k \qquad \text{con } k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Esercizio 7. Calcolare

$$\int \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}\,dx$$

Svolgimento. Risulta

$$x^3-2x^2-x+3 = (x^2-3x+2)(x+1)+1$$

quindi

$$\frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2} = x+1+\frac{1}{x^2-3x+2}$$

Allora

$$\int \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$$

Essendo $Q(x) = x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, si determinano A e B tali che

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \tag{3}$$

Essendo, per $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$,

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

deve essere $1 = (A+B)x-(2A+B),\ \forall x\in\mathbb{R}$ ovvero

$$\begin{cases} A+B=0\\ -(2A+B)=1\end{cases}$$

da cui $A=-1$ e $B=1$. e quindi la (3) si riscrive come

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

Pertanto si ha

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx \int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\log|x-1| + \log|x-2| + c = \log|\frac{x-2}{x-1}| + c$$

Dunque

$$\int \frac{x^3-2x^2-x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|\frac{x-2}{x-1}| + c$$

Esercizio 8. Calcolare

$$\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx$$

Svolgimento. L'equazione $(x-2)(x^2+x+1)=0$ si scinde nelle due equazioni $x-2=0$ e $x^2+x+1=0$: la prima ha come radice 2, la seconda ha radici complesse. Si pone

$$\frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Eliminando i denominatori si ha

$$2x+10 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-2)$$

da cui segue $A=2$, $B=-2$, $C=-4$. Si ha dunque

$$\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx = 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx$$

Il primo integrale a secondo menbro vale $2\log(x-2)=\log(x-2)^2$; per il secondo integrale si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\,d(x+1/2)\\ &= \log(x^2+x+1) + \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+(1/2)}{\sqrt{3}/2} + c\end{aligned}$$

Quindi, in definitiva, si ha

$$\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx = \log\frac{(x-2)^2}{x^2+x+1} - 2\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Esercizio 9. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x-2}.$$

Svolgimento.

- La funzione è definita per ogni $x \neq \log 2$; è positiva per $x > \log 2$, negativa per $x < \log 2$.
- La retta di equazione $x = \log 2$ è asintoto verticale; la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, la retta $y=-1/2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
- La funzione è decrescente e convessa per $x > \log 2$, decrescente e concava $x < \log 2$.

Il grafico è in figura 2; in blu l'asintoto orizzontale.
Esercizio 10. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \log(\cos x)}{x^4}$$

Svolgimento. Si ha

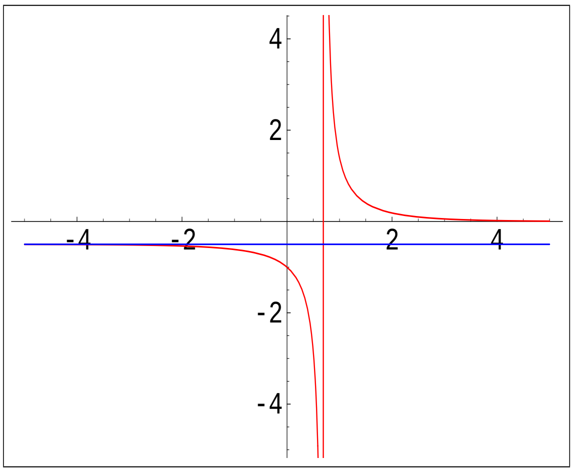

Figura 2: Grafico della funzione dell'esercizio 9.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$
$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Posto $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ si ha $y^2 = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$ e quindi

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \log(\cos x)}{x^4} = \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-(3/24)x^4}{x^4} = -\frac{1}{8}$$