Esercitazione del 15 gennaio 2014

Esercizio 1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+2x-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})}$$

Svolgimento. Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$. Si ha

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$$
$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1+2x-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt{x})} &= \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-(1+2x)^{1/2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\frac{x}{2}+o(x))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-(1+x+o(x))}{x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x+o(x)} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

Svolgimento. Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$. Ricordando lo sviluppo della funzione seno, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{6}$$

Esercizio 3. Determinare i valori del parametro reale k che rendono invertibile la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-k & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Svolgimento. Tramite il teorema di Laplace, sviluppando lungo la prima colonna, si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1-k & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ k & 0 \end{vmatrix}$$

e risulta $\det A = k^2-3k+2$. I valori di k che rendono la matrice A invertibile sono quelli per cui $\det A \neq 0$, ovvero deve essere $k\neq 2 \wedge k\neq 1$.

Esercizio 4. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = \log(x^2-4x+3).$$

Svolgimento. Il dominio della funzione è dato dall'insieme delle $x\in\mathbb{R} : x^2-4x+3>0$, ovvero dall'insieme $((-\infty,1)\cup(3,+\infty))$.

La curva passa per il punto $(0, \log 3)$.

Risulta $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 1$, quindi per $x \in \big((-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)\big)$.

Si ha

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \log(x^2 - 4x + 3) = +\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \log(x^2 - 4x + 3) = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \log(x^2 - 4x + 3) = -\infty$$

Dunque le rette $x = 1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali per la funzione. Non esistono asintoti orizzontali nè asintoti obliqui.

Risulta

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 3}$$

dal segno della quale si vede che $f(x)$ cresce in $(3, +\infty)$ e decresce in $(-\infty, 1)$.

Si ha

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

quindi la funzione è concava su tutto il dominio.

In figura 1 il grafico.

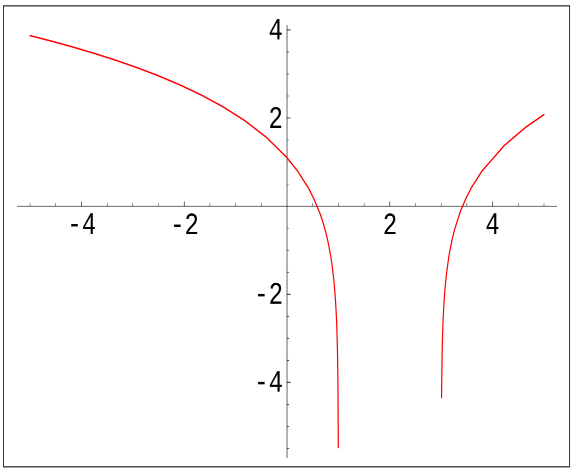

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 4.

Esercizio 5. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}\; e^{-(x+1)}$$

Svolgimento. Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$.

La curva passa per i punti $P_1=(0,-\frac{1}{e})$ e $P_{2,3}=(\pm 1,0)$.

Risulta $f(x)\geq 0$

$$f(x)=\begin{cases} >0 & \text{se } x<-1 \vee x>1\ , \\ <0 & \text{se } x\in(-1,1). \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt[3]{x^2-1}\ e^{-(x+1)}=0^+$$
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt[3]{x^2-1}\ e^{-(x+1)}=+\infty$$

Dunque la retta $y=0$ è asintoto orizzontale per la funzione per $x\longrightarrow+\infty$. Non esistono asintoti verticali e neanche obliqui.

Si ha

$$f'(x)=\frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}e^{-(x+1)}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}e^{-(x+1)}=\frac{3x^2-2x-3}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}e^{-(x+1)}$$

Dunque la funzione cresce nell'intervallo $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3},\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$, decresce altrove.

La derivata prima non è definita in $x=\pm1$ e si ha

$$\lim_{x\longrightarrow-1}f'(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow1}f'(x)=+\infty$$

Dunque, in $x=\pm1$ il grafico ha due punti a tangente verticale.