

ESERCIZIO 1. [4] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(\cos x - 1)^2}.$$

ESERCIZIO 2. [4+2] Data la funzione

$$f(x) = |x|(x-1)\left(|x-3|-3\right),$$

(2.1) si mostri che  $f(x)$  è derivabile in  $x = 2$  e in  $x = 0$ , ma non in  $x = 3$ ;

(2.3) si calcolino  $f'(2)$  e  $f'(0)$ , cioè la derivata di  $f(x)$  in  $x = 2$  e in  $x = 0$ ;

FACOLTATIVO: si discuta per quali valori di  $x$  si ha  $f(x) \geq 0$ .

ESERCIZIO 3. [4+2] Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

(3.1) si trovi quale delle matrici  $B$ ,  $C$  e  $D$  commuti con  $A$  (due matrici  $M, N$  commutano se  $MN = NM$ );

(3.2) si calcolino gli autovalori di  $A$ ;

(3.3) si determinino gli autovettori corrispondenti;

(3.4) si trovi  $A^2$  e se ne calcolino gli autovalori;

FACOLTATIVO: si determinino gli autovalori e gli autovettori delle matrici  $B$  e  $C$ .

ESERCIZIO 4. [4+1] Nel piano  $xy$  sia  $r$  la retta di equazione  $2x - y - 3 = 0$  e  $P$  il punto di coordinate  $P = (10, 4)$ .

(i) Si determini un vettore  $\vec{v}$  parallelo alla retta  $r$ ;

(ii) si determini un vettore  $\vec{w}$  ortogonale a  $\vec{v}$ ;

(iii) si determini la retta  $s$  ortogonale a  $r$  e passante per il punto  $P$ ;

(iv) si calcolino le coordinate del punto d'intersezione  $Q$  tra le due rette  $r$  e  $s$ .

FACOLTATIVO: si calcoli la distanza del punto  $P$  dalla retta  $r$ .

ESERCIZIO 5. [5] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x^2-x-2)}.$$

ESERCIZIO 6. [9] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = e^{x/(1-x)}.$$

In particolare si determini il dominio della funzione, si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, convessa o concava e si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.  
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**