

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - QUARTO APPELLO (30-06-2015)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - x) - \ln(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite usando un metodo differente da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [9] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2.$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iii) si discuta dove è convessa o concava e (iv) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4] Nel piano xy sia r la retta di equazione $4y - x = 0$ e P il punto di coordinate $P = (4, 0)$.

(3.1) Si determinino un vettore \vec{v} parallelo alla retta r e un vettore \vec{w} ortogonale a \vec{v} ;

(3.2) si determini la retta s ortogonale a r e passante per il punto P ;

(3.3) si calcolino le coordinate del punto d'intersezione Q tra le due rette r e s ;

(3.4) si calcoli la distanza del punto P dalla retta r .

ESERCIZIO 4. [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

(4.1) si calcolino gli autovalori di A ;

(4.2) si calcolino gli autovettori di A ;

(4.3) si dimostri che $A^2 = 5A$.

FACOLTATIVO: si usi il risultato (4.3) per calcolare A^8 .

ESERCIZIO 5. [4] Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{4 + x + x^2}{1 + 4x^2} dx.$$

ESERCIZIO 6. [4+2] Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = 1 + x^3 + x^5 + x^7 + e^x.$$

(6.1) si mostri che $f(x)$ è biunivoca;

(6.2) si discuta quanti zeri ha la funzione $f(x)$ (ovvero quanti valori x_0 esistono tali che $f(x_0) = 0$).

FACOLTATIVO: si discuta se esistono zeri positivi.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**