

MAT1 - Matematica 1

PROVA D'ESAME - QUINTO APPELLO (14-7-2015)

ESERCIZIO 1. [5+2] Si calcoli il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) - \ln(1+x-x^2)}{\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite con un metodo diverso da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2.$$

In particolare se ne determini il dominio, si individuino eventuali punti di massimo e minimo relativo, si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, dove convessa o concava e si studi l'esistenza di asintoti.

ESERCIZIO 3. [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(3.1) si mostri che il determinante di A è diverso da zero e si calcoli la matrice inversa A^{-1} ;

(3.2) si determinino gli autovalori di A ;

(3.3) si determinino gli autovettori di A ;

(3.4) si calcoli A^2 .

FACOLTATIVO: si calcoli A^{100} .

ESERCIZIO 4. [4+1] Nel piano xy si considerino il punto $P = (-6, 0)$ e la retta r di equazione $3x - y + 6 = 0$.

(4.1) Si determini un vettore \vec{v} parallelo alla retta r ;

(4.2) si determini un vettore \vec{w} ortogonale a \vec{v} ;

(4.3) si determini la retta s ortogonale a r e passante per il punto P ;

(4.4) si calcolino le coordinate del punto d'intersezione Q tra le due rette r e s .

FACOLTATIVO: si calcoli la distanza del punto P dalla retta r .

ESERCIZIO 5. [5] Si dimostri che

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = 1.$$

ESERCIZIO 6. [5] Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**