

Corso di laurea in Scienza Geologiche - Anno Accademico 2013/2014

**MAT1 - Matematica 1**

PROVA D'ESAME - SETTIMO APPELLO (04-11-2013)

ESERCIZIO 1. [4+3] Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{x^2}) \sin x}{(1 + x^2)^{2/3} - (1 - x^2)^{1/3}}.$$

FACOLTATIVO: si calcoli il limite usando un metodo differente da quello usato precedentemente.

ESERCIZIO 2. [10] Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{x-2}{x-1} \right).$$

In particolare (i) si determini il dominio della funzione, (ii) se ne studi la continuità, (iii) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, (iv) si discuta dove è convessa o concava e (v) si studi l'esistenza di eventuali asintoti.

ESERCIZIO 3. [4+3] Data la funzione

$$f(x) = \ln(e^x + 1),$$

(3.1) si determini il suo dominio  $D_f$ ;

(3.2) si dimostri che la funzione è crescente in  $D_f$ ;

(3.3) si determini il codominio  $C_f$  della funzione;

(3.4) si dimostri che la funzione  $f: D_f \rightarrow C_f$  è invertibile.

FACOLTATIVO: si determini la funzione inversa  $g(x) = f^{-1}(x)$  e si verifichi che  $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ .

ESERCIZIO 4. [4+2] Dati i due vettori nello spazio  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  e  $\vec{w} = (4, 0, 1)$ ,

(4.1) si determinino i vettori  $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$  e  $\vec{b} = 4\vec{v} - \vec{w}$ ;

(4.2) si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ;

(4.3) si calcoli il prodotto vettoriale  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ;

(4.4) si calcoli il prodotto scalare  $(\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$ .

FACOLTATIVO: si discuta se i tre vettori  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{a}$  sono linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 5. [4+2] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(5.1) si calcoli  $A^2$ ;

(5.2) si calcolino gli autovalori di  $A$ , in particolare si verifichi che  $\lambda = 0$  è un autovalore;

(5.3) si determini un autovettore associato all'autovalore  $\lambda = 0$ .

FACOLTATIVO: si determinino gli altri autovettori di  $A$ .

ESERCIZIO 6. [4+2] Si calcoli l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{(1+x^2)(1-x)} dx.$$

FACOLTATIVO: si calcoli l'integrale indefinito  $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-x^2} dx$  riconducendosi all'integrale precedente.

**Ogni foglio consegnato deve contenere: nome, numero di matricola, firma.  
Non è consentito l'uso di libri, quaderni, appunti, telefonini e calcolatrici grafiche.**