Esercitazione del 1 ottobre 2014

Esercizio 1. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \geq 0$$

Svolgimento Portando tutti i termini al primo membro e determinando il minimo comune multiplo tra i denominatori si ottiene

$$\frac{(x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \geq 0;$$

ovvero

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x(x-1)(x-2)} \geq 0.$$

La disequazione si studia facendo il quoziente (che segue le medesime regole del prodotto) tra il segno del numeratore e quello del denominatore. Anche la risoluzione di disequazioni di grado superiore al secondo, fattorizzate, può essere effettuata tramite la regola dei segni: di ogni fattore si studia il segno, tracciando una linea continua negli intervalli in cui il fattore è positivo e una tratteggiata dove è negativo. Da tale regola, per l'esercizio in questione, si ottengono gli schemi di cui alle figure 1 e 2, dove il cerchietto pieno indica che il valore considerato va incluso tra le soluzioni, il cerchietto vuoto indica che deve essere escluso. Le soluzioni della disequazione sono dunque $0 < x \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \vee 1 < x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x > 2$, essendo $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ gli zeri dell'equazione $3x^2 - 6x + 2 = 0$.

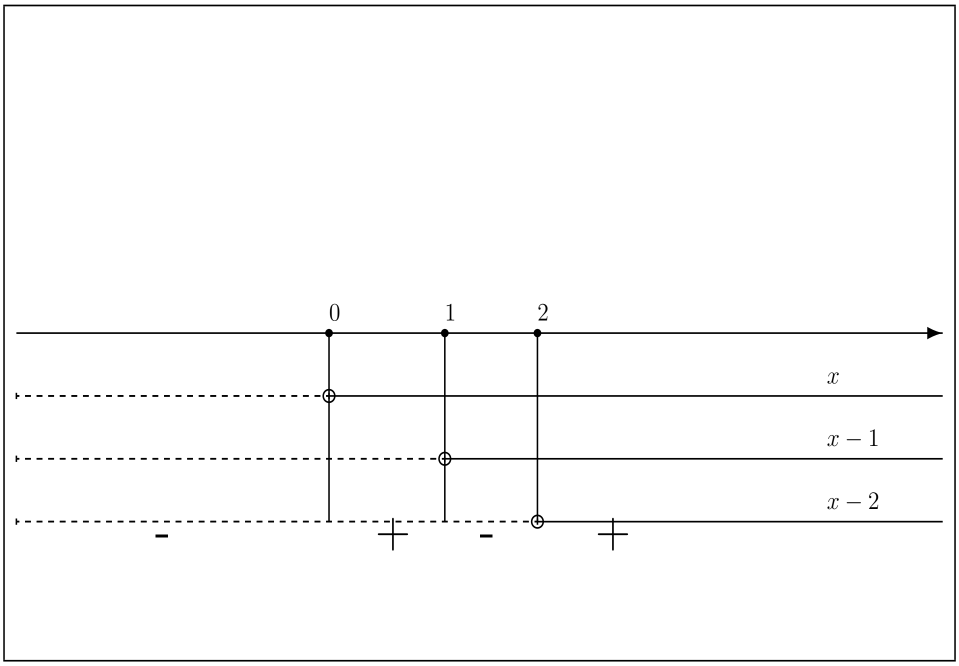

Figura 1: Regola dei segni per il denominatore nell'esercizio 1

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$\frac{10}{x^2 + 1} > 6 - x^2$$

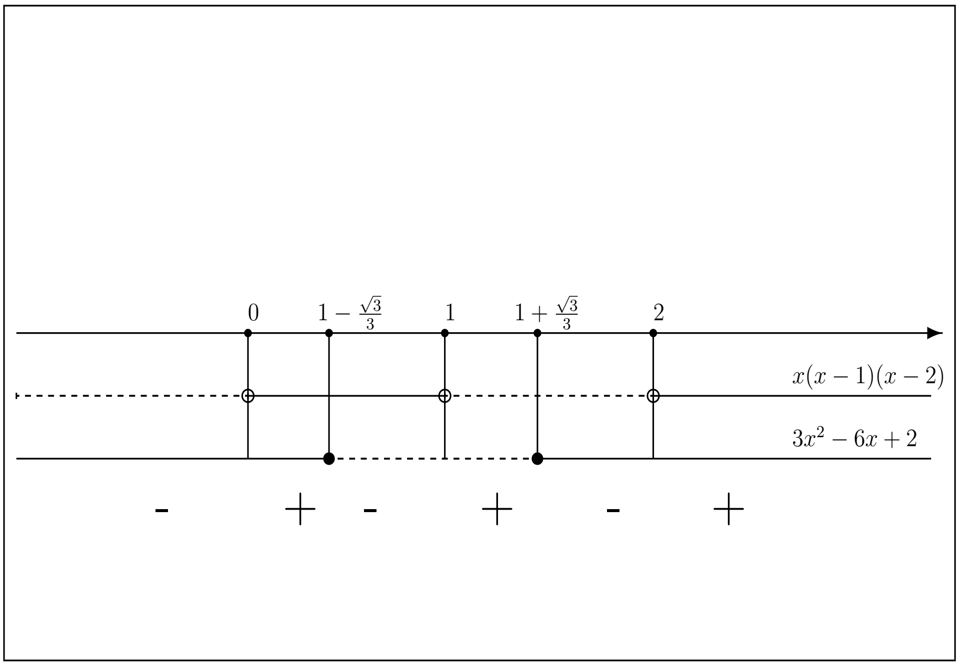

Figura 2: Regola dei segni per l'esercizio 1

Svolgimento Portando tutto a sinistra di $>$, facendo il denominatore comune si ottiene la disequazione

$$\frac{x^4-5x^2+4}{x^2+1} > 0.$$

Ponendo $x^2 = t$, occorre studiare gli zeri dell'equazione $t^2-5t+4=0$, che sono $t=1$ e $t=4$; quindi la disequazione $t^2-5t+4>0$ è verificata per $t<1 \vee t>4$, ovvero $x^4-5x^2+4>0$ è vera per $x^2<1 \vee x^2>4$. Le soluzioni della disequazione data sono dunque date dall'intervallo $((-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty))$, considerando che $x^2+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$-\frac{1}{7+x^4} > x^2+3$$

Svolgimento La disequazione proposta non ammette soluzioni poiché il primo membro è sicuramente negativo, mentre il secondo è positivo.

Esercizio 4. Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} < 1 \\ \\ \frac{x-7}{2} + x^2 + 4 > 0 \end{cases}$$

Svolgimento Si ha:

- $\frac{x+1}{x-2} < 1$ sse $\frac{x+1-x+2}{x-2} < 0$ ovvero sse $x<2$;
- $\frac{x-7}{2} + x^2 + 4 > 0$ sse $2x^2+x+1>0$ che è vera $\forall x\in\mathbb{R}$.

Dunque il sistema è verificato per $x \in (-\infty, 2)$; si veda, a tal proposito, anche quanto esposto nello svolgimento dell'esercizio 5.

Esercizio 5. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{1-x^2} < x$$

Svolgimento La risoluzione della disequazione irrazionale

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \quad n \text{ pari}$$

equivale alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} p(x) < q^n(x) \\ p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

La disequazione dell'esercizio, dunque, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 1-x^2 < x^2 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1-2x^2 < 0 \\ x^2-1 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Al sistema si applica la regola dei sistemi, di cui al grafico 3: in ogni riga, con una linea continua, si rappresenta la zona corrispondente alle soluzioni della disequazione in esame:

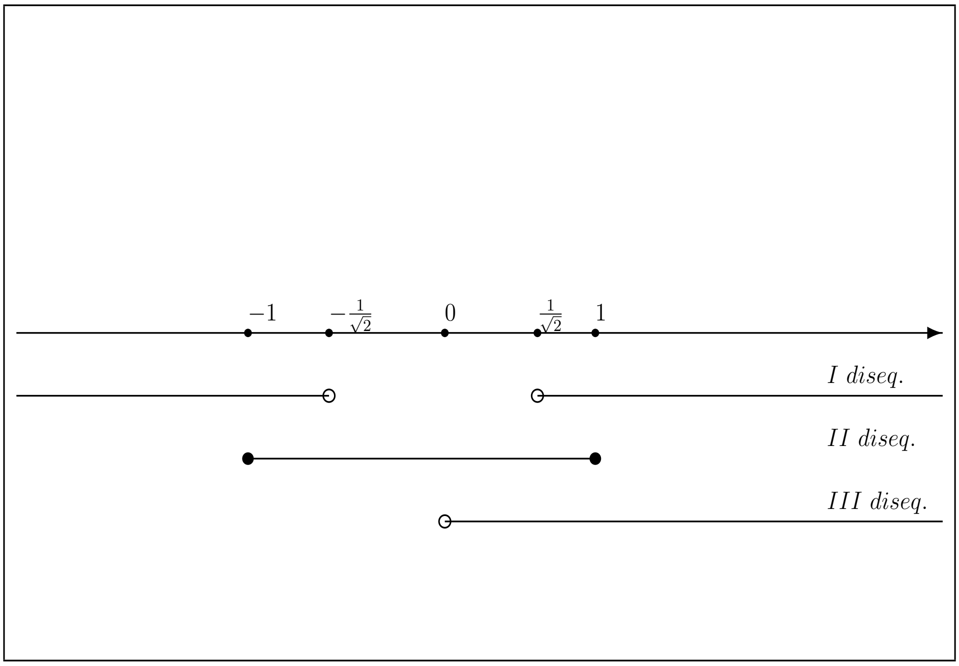

Figura 3: Regola dei sistemi per l'esercizio 5

Le soluzioni sono rappresentati dagli intervalli in cui sono presenti tante linee continue quante sono le disequazioni del sistema, ovvero, per questo esercizio, sono date dall'intervallo $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$.

Esercizio 6. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x-4} < 3-2x$$

Svolgimento La disequazione dell'esercizio è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3-2x > 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x-4 < 9-12x+4x^2 \end{cases}$$

La I disequazione è verificata per $x < \frac{3}{2}$, mentre la II disequazione del sistema è verificata per $x \geq 4$. La terza disequazione si scrive anche $4x^2 - 13x + 13 > 0$ che è sempre vera, l'equazione di II grado ad essa associata avendo discriminante negativo.
Facendo lo schema della regola dei sistemi, si vede che le 3 disequazioni non sono mai verificate contemporaneamente, quindi il sistema ha come soluzione l'insieme vuoto $\{\emptyset\}$.

Esercizio 7. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{1-x^2} > x$$

Svolgimento Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x), \quad n \text{ pari}$$

equivale ad unire le soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq q^n(x) \end{cases}$$

La disequazione data, quindi, ha per soluzioni l'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq x^2 \end{cases}$$

che equivalgono rispettivamente ai sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \text{e} \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-2x^2 > 0 \end{cases}$$

Il primo tra questi ha soluzioni $-1 \leq x < 0$, mentre il secondo ha soluzioni $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Unendo queste due soluzioni si trova che la disequazione data ha soluzioni $-1 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 8. Risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{x^2-2x} \geq 2x-3$$

Svolgimento Risulta

$$\sqrt[3]{x^2-2x} \geq 2x-3 \longrightarrow x^2-2x \geq (2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

Occorre dunque risolvere la disequazione $8x^3 - 37x^2 + 56x - 27 \leq 0$ che equivale alla disequazione $(8x^2 - 29x + 27)(x-1) \leq 0$ ovvero a $x - 1 < 0$, essendo negativo il discriminante dell'equazione $8x^2 - 29x + 27 = 0$. Le soluzioni della disequazione data sono dunque rappresentate dall'intervallo $(-\infty, 1]$.