Esercitazione del 8 ottobre 2014

Esercizio 1. Risolvere la disequazione

$$2^{x+1} + \frac{8}{2^x} \geq 17$$

Svolgimento. Ponendo $t = 2^x$, per la disequazione data si ha

$$2t + \frac{8}{t} \geq 17 \longrightarrow \frac{2t^2 - 17t + 8}{t} \geq 0 \longrightarrow t \leq \frac{1}{2} \vee t \geq 8$$

ovvero deve essere $2^x \leq \frac{1}{2} = 2^{-1} \vee 2^x \geq 8 = 2^3$; le soluzioni della disequazione data sono dunque date da $x \leq -1 \vee x \geq 3$.

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$|4^x - 4^{2x}| > 3$$

Svolgimento. La disequazione data equivale a $4^x - 4^{2x} < -3 \vee 4^x - 4^{2x} > 3$ da cui, posto $t = 4^x$, si ha

$$-t^2 + t + 3 < 0 \vee -t^2 + t - 3 > 0 \longrightarrow t^2 - t - 3 > 0 \vee t^2 - t + 3 < 0$$

Di queste due disequazioni la seconda non è mai verificata perchè il discriminante di $t^2 - t + 3 = 0$ è nullo, mentre si ha $t^2 - t - 3 = 0$ per $t = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; quindi $4^{2x} - 4^x - 3 > 0$ per $4^x < \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ (mai vera perchè $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0$) e $4^x > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ ovvero per $x > \log_4 \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione è quindi l'intervallo $A = \left(\log_4 \frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$e^{|x-1|} < e^x.$$

Svolgimento. La disequazione data è equivalente alla disequazione $|x - 1| < x$, per la cui risoluzione occorre risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x - 1 < x \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -(x-1) < x \\ x - 1 < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x + 1 < x \\ x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases}$$

che hanno soluzioni, rispettivamente, $x \geq 1$ e $\frac{1}{2} < x < 1$; l'equazione data è quindi vera per $x > \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt[4]{x^4 - 1}.$$

Svolgimento. Deve essere $x^4 - 1 \geq 0 \longrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) \geq 0 \longrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Esercizio 5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \frac{2 - 3e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Svolgimento. Deve essere $e^x \neq 1 \longrightarrow x \neq 0$.
Esercizio 6. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{x-4}$$

Svolgimento. Tutto $\mathbb{R}$ poiché la radice è di indice dispari.
Esercizio 7. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+2|}}$$

Svolgimento. Deve essere $x \neq -2$ perché al denominatore.

Esercizio 8. Determinare il campo di esistenza

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

Svolgimento. Deve essere verificato il sistema

$$\begin{cases} x \neq 2 \text{ perché al denominatore} \\ \frac{x}{x-2} > 0 \text{ perché argomento di logaritmo} \end{cases}$$

che ha soluzioni $x < 0 \vee x > 2$.

Esercizio 9. Determinare il campo di esistenza

$$f(x) = \log\sqrt{x}$$

Svolgimento. Deve essere verificato il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ perché radicando} \\ \sqrt{x} > 0 \text{ perché argomento di logaritmo} \end{cases}$$

che ha soluzioni $x > 0$.

Esercizio 10. Determinare il campo di esistenza

$$f(x) = \sqrt{\log x}$$

Svolgimento. Deve essere verificato il sistema

$$\begin{cases} \log x \geq 0 \text{ perché radicando} \\ x > 0 \text{ perché argomento di logaritmo} \end{cases}$$

che ha soluzioni $x \geq 1$.

Esercizio 11. Determinare il campo di esistenza

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(e^x)}}$$

Svolgimento. Deve essere verificato il sistema

$$\begin{cases} \sin(e^x) \geq 0 \text{ perché radicando} \\ \sqrt{\sin(e^x)} \neq 0 \text{ perché al denominatore} \end{cases}$$

e dunque deve essere $\sin(e^x) > 0$, considerando che $0 \leq \sqrt{F(x)}$ nei punti in cui $F(x) \geq 0$. Risulta $\sin(e^x) > 0$ per $2k\pi < e^x < \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi per $\log(2k\pi) < x < \log(\pi(2k+1))$, $k \in \mathbb{N}$, dovendo essere $\begin{cases} 2k\pi > 0 \\ \pi(2k+1) > 0 \end{cases}$.

Esercizio 12. La funzione $f(x) = 2x - 3$ è iniettiva; infatti se $x_1 \neq x_2$ si ha

$$x_1 \neq x_2 \longrightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \longrightarrow 2x_1 - 3 \neq 2x_2 - 3;$$

inoltre, se $y = 2x - 3$ risulta $x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ ne è l'inversa.
La funzione $y = x^2$ non è nè iniettiva nè suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.