Esercitazione del 15 ottobre 2014

Esercizio 1. Risolvere la disequazione

$$\sin^2 < \sin x$$

Svolgimento. Ponendo $t = \sin x$ si ottiene la disequazione di secondo grado $t^2 - t < 0$ che ha soluzioni $0 < t < 1$; deve dunque essere verificato il sistema

$$\begin{cases} \sin x < 1 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni $2k\pi \leq x \leq \pi(2k+1),\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$\sin x < \cos(2x)$$

Svolgimento. Si ha

$$\sin x < \cos(2x) \Longleftrightarrow \sin x < 1 - 2\sin^2(x) \Longleftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0$$

da cui, ponendo $t = \sin x$, si ottiene la disequazione $2t^2 + t - 1 < 0$ che ha per soluzioni $-1 < t < \frac{1}{2}$; deve dunque essere $-1 < \sin x < \frac{1}{2} \longrightarrow 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi(k+1),\ \ x \neq -\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Svolgimento. Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} &\longrightarrow \frac{\sin x(\cos x + \sin x) + \sin(\cos x - \sin x)}{\cos(2x)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\longrightarrow \frac{2\sin x \cos x}{\cos(2x)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\longrightarrow \tan(2x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

tale ultima diseguaglianza è vera se $\cos(2x) \neq 0 \longrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \longrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. La disequazione data ha soluzioni $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$ ovvero $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$; risulta, però,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

in base al limite notevole $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0$, con $b > 0$.

Esercizio 5. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \sqrt{x+1}}{x}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$; risulta, però,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\log(x+1)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

in base al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$.

Esercizio 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\log x}$$

Svolgimento. Risulta, posto $y = \frac{2}{y-1}$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{(\log x)^2} = +\infty.$$

Esercizio 7. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $[1^\infty]$; si ha

$$x^{\frac{2}{x-1}} = \left(\frac{2+y}{y}\right)^y = \left(1 + \frac{2}{y}\right)^y$$

e dunque

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{2}{y}\right)^y = e^2$$

per il limite notevole $\lim_{t\to\pm\infty} \left(1 + \frac{b}{t}\right)^t = e^b$. Il limite dato si può anche calcolare usando l'eguaglianza

$$x^{\frac{2}{x-1}} = e^{\log\left(x^{\frac{2}{x-1}}\right)}$$

e usanado la continuità della funzione esponenziale e le proprietà dei logaritmi.

Esercizio 8. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+3x}\right)$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+3x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+3x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+3x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+3x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - x^2 - 3x}{2x + \sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x(x-1)}{x\left(2 + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3(x-1)}{2 + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 9. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})^3 \log[(x-1)^2]}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$; risulta

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})^3 \log[(x-1)^2]}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(\sqrt{x-2})^3 \log[1+(x-2)]}{(x-2)^{\frac{5}{2}}(x+2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{(x+2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{16}$$

in base al limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$.

Esercizio 10. Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+e^x}{2x^3+\log(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(\frac{3x^2}{e^x}+1)}{x^3(2+\frac{\log(x^2)}{x^3})} = +\infty$$

in base ai limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \text{ con } b \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^k}{x} = 0 \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$