Esercitazione del 22 ottobre 2014

Esercizio 1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{1-\cos(x-3)}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $[0^0]$; risulta, però,

$$\lim_{x\to 3^+}(x-3)^{1-\cos(x-3)}=\lim_{t\to 0^+}e^{(1-\cos t)\log t}=\lim_{t\to 0^+}e^{\frac{(1-\cos t)}{t^2}t^2\log t}=e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=1$$

in base al limite notevole $\lim_{s\to 0}\frac{1-\cos s}{s^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{s\to 0^+}s^2\log s=0$.

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x+2x}{e^{3x}}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; risulta, però,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x+2x}{e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\left(\frac{\log x}{2x}+1\right)}{e^{3x}}=0$$

in base al limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$ con $b\in\mathbb{R}$ e $a>1$.

Esercizio 3. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x+3}{x-\log x}$$

Svolgimento. Risulta

$$\frac{2}{x-\log x}\leq\frac{\sin x+3}{x-\log x}\leq\frac{4}{x-\log x}$$

Poiché $\lim_{x\to+\infty}x-\log x=+\infty$, risulta $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x-\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-\log x}=0$ e quindi anche $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x+3}{x-\log x}=0$.

Esercizio 4. Calcolare

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2\log x\sin(x-3)}{(5x+1)[e^{(x-3)}-1]}$$

Svolgimento. Risulta

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2\log x\sin(x-3)}{(5x+1)[e^{(x-3)}-1]}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2\log x}{(5x+1)}\cdot\frac{\sin(x-3)}{x-3}\cdot\frac{x-3}{[e^{(x-3)}-1]}=\frac{9}{16}\log 3$$

in base ai limiti notevoli $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ e $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$.

Esercizio 5. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty(\infty-\infty)$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]\left[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right]}{\left[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right]}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[(x^2+1)-(x^2-1)\right]}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]}=1\end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinare a in modo che sia

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3ax^2)}{5x^2} = 1$$

Svolgimento. Risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3ax^2)}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3ax^2)}{3ax^2} \cdot \frac{3ax^2}{5x^2} = \frac{3}{5}a$$

in base al limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$; si ha $\frac{3}{5}a = 1$ se $a = \frac{5}{3}$.

Esercizio 7. Data

$$f(x) = \log(\sin(2x))$$

risulta

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

per il teorema di derivazione delle funzioni composte.

Esercizio 8. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & \text{se } x \le 0 \vee x \ge 2 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x(x-2)} = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} = +\infty \neq 0 = f(2) = \lim_{x\to 2} \sqrt{x(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Dunque tale funzione non è continua nè in $x = 0$ e neanche in $x = 2$, quindi in tali punti non è neanche derivabile.

Esercizio 9. Data

$$f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{x-2}$$

risulta

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)\log(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

essendo:

$$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)}$$
$$(\log F(x))' = \frac{F'(x)}{F(x)}$$

Esercizio 10. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = |3x - 1 + (5 - 2x)|$ non è derivabile in $x = 4$; infatti $f(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e risulta

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{|h| - 0}{h} = \pm 1$$

Dunque il punto $x = 4$ è un punto angoloso, risultato a cui si può giungere osservando che

$$f(x) = |x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{se } x \geq -4 \\ -x-4 & \text{se } x < -4 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > -4 \\ -1 & \text{se } x < -4 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$f'_+(-4) = \lim_{x \to -4^+} f'(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to -4^-} f'(x) = f'_-(-4).$$

Esercizio 11. Data

$$f(x) = \frac{(2x+3)\log x}{e^x}$$

risulta

$$f'(x) = \frac{2x+3-x(2x+1)\log x}{xe^x}$$

essendo:

$$\left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)}$$

Esercizio 12. Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Poiché le funzioni $x \mapsto |1+x|$ e $x \mapsto \log(1+x)$ sono continue in $\mathbb{R}$, occorre verificare la continuità della funzione solo in $x = 0$; risultando

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

la funzione è continua in $\mathbb{R}$. Essendo

$$f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -x-2 & \text{se } x < -1 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

si vede che la funzione non è derivabile in $x = -1$ dove ha un punto angoloso; invece, essendo

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$$

la funzione risulta essere derivabile in $x = 0$; l'insieme di derivabilità è dunque $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$.