Esercitazione del 29 ottobre 2014

Nel seguito con il simbolo $A \overset{H}{=} B$ si intenderà il passaggio da A a B usando il teorema di L'Hôpital.

Esercizio 1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sqrt{x})}{x^2-x}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sqrt{x})}{x^2-x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{[\cos(x-\sqrt{x})](1-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{2x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(2\sqrt{x}-1)\cos(x-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(2x-1)} = \infty.$$

Esercizio 2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(1+2e^{x-1})}{\sqrt{2-2x+x^2}}$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(1+2e^{x-1})}{\sqrt{2-2x+x^2}} &\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2e^{x-1}}{1+2e^{x-1}}}{\frac{-1+x}{\sqrt{2-2x+x^2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{x-1}}{1+2e^{x-1}} \frac{\sqrt{2-2x+x^2}}{x-1} \\ &= (\text{ posto } x-1=t \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\ ) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2e^t}{1+2e^t} \frac{\sqrt{2-2t-2+t^2+2t+1}}{t} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{e^t}+2} \frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t}} = 1.\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\infty - \infty$; risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2+2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \frac{0}{0} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x-2\sin x}{2x(1-\cos x)+x^2\sin x} = \frac{0}{0} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{2(1-\cos x)+2x\sin x+2x\sin x+x^2\cos x} = \frac{0}{0} \\ &\overset{H}{=} \frac{2\sin x}{2\sin x+4\sin x+4x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x} = \frac{0}{0} \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{6\cos x+6\cos x-6x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\log(x+\sqrt{x}) - \sqrt{x}\right]$$

Svolgimento. Si ha la forma indeterminata $\infty - \infty$; risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(x+\sqrt{x})-\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\log(x+\sqrt{x})-\log e^{\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\log\frac{x+\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}}$$
$$= \log\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} = \log\frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \log\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$$
$$= \log\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+1}{e^{\sqrt{x}}} = \log\frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \log\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$$
$$= \log\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{\sqrt{x}}} = \log\frac{2}{\infty} = -\infty$$

Esercizio 5. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = -\sqrt{4e^{2x}-4}.$$

Svolgimento.

1. La funzione è definita se $e^{2x}-1 \geq 0$ ovvero per $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0$.

2. La funzione è non positiva nel suo insieme di definizione.

3. La funzione non è pari, ovvero $f(x) \neq f(-x)$; essa non è neanche dispari, ovvero $f(-x) \neq -f(x)$.

4. La funzione è t.c. $f(x) = 0$ sse $x = 0$.

5. Poiché risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{e^{2x}(1-\frac{1}{e^{2x}})} = \lim_{x\to+\infty} -2e^{x} = -\infty$$

   si concluse che il grafico della funzione non ha asintoto oibliquo, avendo $f(x)$ comportamento asintotico esponenziale.

6. Risulta

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} < 0 \qquad \forall x > 0$$

   La derivata prima non si annulla mai; dallo studio del segno di f' segue che la funzione è strettamente decrescente nel suo campo di esistenza. Risulta $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, pertanto il grafico di $f(x)$ ha pendenza verticale nell'origine.

7. $$f''(x) = \frac{-2e^{2x}(e^{2x}-2)}{\sqrt{(e^{2x}-1)^3}} > 0 \Longleftrightarrow e^{2x}-2 < 0 \Longleftrightarrow x < \frac{\log 2}{2}$$

   Dallo studio del segno di f'', si deduce che f è convessa in $[0, \frac{\log 2}{2})$ e concava in $(\frac{\log 2}{2}, +\infty)$ Il punto $x = \frac{\log 2}{2}$ è punto di flesso.

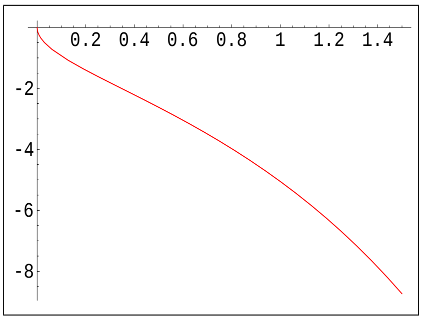

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 5.

In figura 1 il grafico della funzione.

Esercizio 6. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = e^{\left|\frac{1-x^2}{x}\right|}.$$

Svolgimento. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1-x^2}{x}} := f_1(x) & \text{se } \frac{1-x^2}{x} > 0 \\ \\ e^{\frac{x^2-1}{x}} := f_2(x) & \text{se } \frac{1-x^2}{x} < 0 \\ \\ e^0 & \text{se } \frac{1-x^2}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < -1 \vee 0 < x < 1 \\ \\ f_2(x) & \text{se } -1 < x < 0 \vee x > 1 \\ \\ 1 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}$$

La funzione è positiva nel suo campo di esistenza, essendo sempre tale l'esponenziale.

1. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = e^{+\infty} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = e^{+\infty} = +\infty$$

quindi per $x \longrightarrow \pm\infty$ non c'è asintoto orizzontale;

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1-x^2}{x}}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1-x^2}{x}}\left(-\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x^2-1}{x}}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x^2-1}{x}}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)}{1} = +\infty$$

non esiste neppure l'asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

2. Risulta

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1} f_1(x) = e^0 = 1\\
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1} f_2(x) = e^0 = 1\\
f(-1) &= 1\\
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1} f_1(x) = e^0 = 1\\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1} f_2(x) = e^0 = 1\\
f(1) &= 1
\end{aligned}$$

3. Essendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} f_2(x) = e^{+\infty} = +\infty\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} f_1(x) = e^{+\infty} = +\infty
\end{aligned}$$

si ha che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.

4. Risulta

$$f_1'(x) = e^{\frac{1-x^2}{x}}\left(-\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

che è sempre negativa, quindi $f_1(x)$ è sempre decrescente;

$$f_2'(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

che è sempre positiva, quindi $f_2(x)$ è sempre crescente;

5. Si ha

$$f_1''(x) = e^{\frac{1-x^2}{x}}\left[\frac{x^4+2x^2+1+2x}{x^4}\right]$$

che è sempre positiva.

$$f_2''(x) = e^{\frac{x^2-1}{x}}\left[\frac{x^4+2x^2+1-2x}{x^4}\right]$$

che è sempre positiva.

Segue, in figura, il grafico di:
$f_1(x)$ (a))
$f_2(x)$ (b))
$f(x)$ (c))

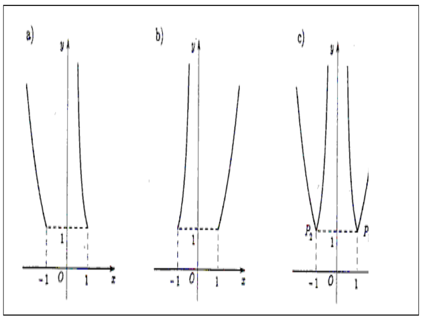

Figura 2: Grafico della funzione dell'esercizio 6.