Esercitazione del 12 novembre 2014

Esercizio 1. Tracciare il diagramma della funzione

$$f(x) = \frac{|x+1|^3}{x^2}.$$

Svolgimento.

1. La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq 0$.

2. Risulta
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^3}{x^2}, & \text{se } x \geq -1 \\ \\ -\frac{(x+1)^3}{x^2}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

3. Nei punti in cui è definita, una funzione modulo è sempre positiva o nulla; quindi $f(x) \geq 0 \forall x \neq 0$.

4. Risulta:

   *
   $$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x+1|^3}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
   quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale;

   *
   $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty \tag{1}$$
   $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -\frac{(x+1)^3}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{x^3}{x^2} = +\infty \tag{2}$$
   e da ciò si deduce che non esistono asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$;

   * Poiché la funzione non ammete asintoti orizzontali, possono esistere asintoti obliqui, per i quali si considerino i seguenti limiti
   $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \pm\frac{(x+1)^3}{x^3} = \lim_{x\to \pm\infty} \pm\frac{x^3}{x^3} = \pm 1 \tag{3}$$
   $$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} - x = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+3x+1}{x^2} = 3; \tag{4}$$
   $$\lim_{x\to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to -\infty} -\frac{(x+1)^3}{x^2} + x = \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x^2-3x-1}{x^2} = -3 \tag{5}$$
   quindi:
   la retta $y = x + 3$ è l'asintoto obliquo per $x \longrightarrow +\infty$;
   la retta $y = -x - 3$ è l'asintoto obliquo per $x \longrightarrow -\infty$.

5. Risulta
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}, & \text{se } x \geq -1 \\ \\ -\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$
La derivata prima si annulla in $x = 1$; dallo studio del segno di f' segue che la funzione è crescente per $x \in ((-1, 0) \cup (2, +\infty))$, mentre è decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$; i punti $x = -1$ e $x = 2$ sono punti di minimo.

6. La funzione è derivabile anche in $x = -1$; infatti
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^3}{h(h-1)^2} = 0$$

In figura 1 il grafico della funzione; in blu e in verde i due asintoti obliqui.

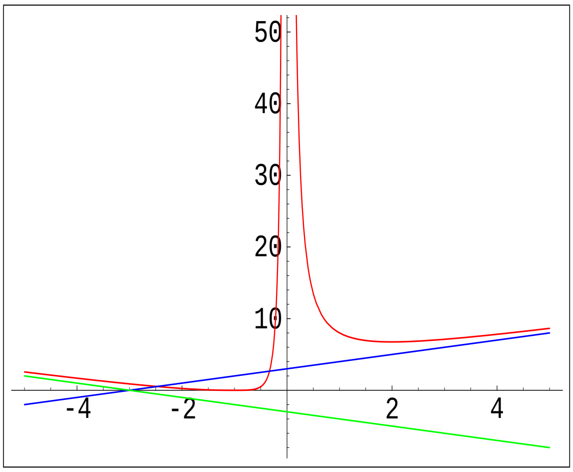

Figura 1: Grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2. Tracciare il diagramma della funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Svolgimento.

1. La funzione è definita se $(x \neq 1) \wedge (\frac{1+x}{1-x} > 0)$, quindi in $(-1, 1)$.

2. Risulta $\log(\frac{1+x}{1-x}) > 0 = \log 1$ se $\frac{1+x}{1-x} > 1$ ovvero se $x \in (0, 1)$; da ciò si vede anche che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

3. La funzione è dispari, infatti
$$f(-x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \log[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}] = -\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

4. Risulta

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \log\frac{0^+}{2} = -\infty \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \log\frac{2}{0^+} = +\infty \tag{7}$$

e da ciò si deduce che le rette $x = -1$ e $x = 1$ sono asintoti verticali per $f(x)$.

5. Si ha

$$f'(x) = \frac{2}{1-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} > 0 \ \forall x > 0$$

la funzione è allora strettamente crescente, è convessa in $[0, 1)$; il punto $x = 0$ è di flesso.

Segue in figura 2 il grafico della funzione.

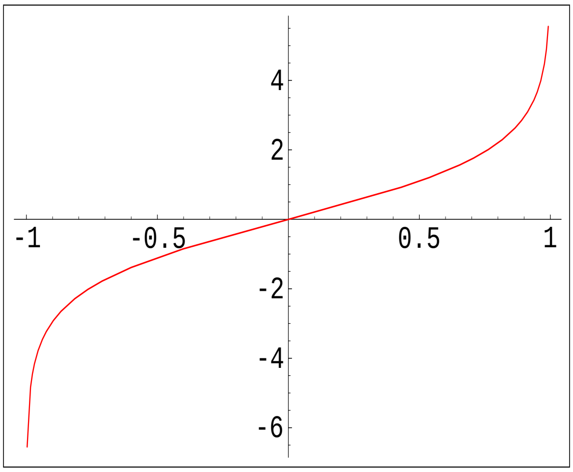

Figura 2: Grafico della funzione dell'esercizio 2.

Esercizio 3.

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$